Soluzioni ai problemi di Ottica geometrica ed ondulatoria

I

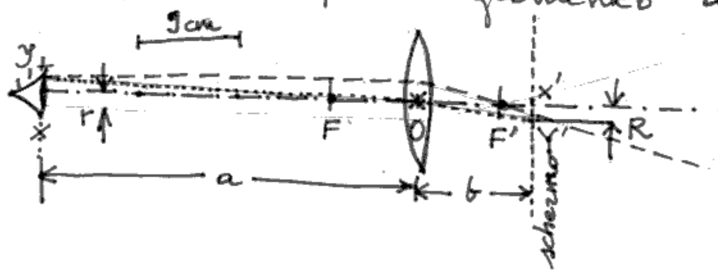
La distanza b dalla lente, ~~in~~ cui è coniugata la distanza a, è data dalle legge delle lenti sottili:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

da cui:

$$b=\frac{aF}{a-F}=\frac{36\cdot 9}{27}=12\ \text{cm}$$

Lo schermo dovrà dunque coincidere con l'immagine della pupilla (in un piano geometrico a distanza b dalla lente)



Per la similitudine dei triangoli

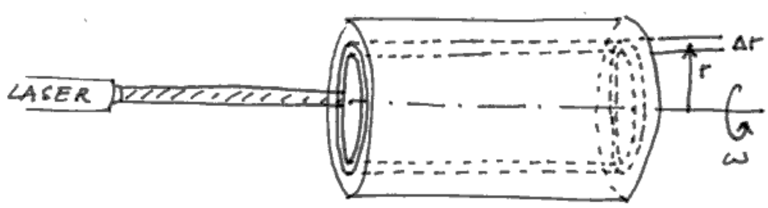
YOX e Y'OX'

si ha che

$$\frac{R}{r}=\frac{b}{a}\Rightarrow R=\frac{12}{36}1{,}5$$

ovvero: $R = 0{,}5$ mm

II



Con riferimento alla figura, si ha che, all'equilibrio, l'accelerazione centrifuga della corona cilindrica sarà controbilanciata (nel sist. di riferimento non inerziale in cui il cilindro è fermo) dalla differenza di pressione. Nello specifico, la legge di Newton è:

superficie corona cilindrica

$$\left[p(r+\Delta r)-p(r)\right]S=\underbrace{\rho\,\Delta r\,S}_{\text{massa corona cilindrica}}\,\omega^2 r$$

(trascuriamo l'accelerazione di gravità)

Dunque:

$$\frac{dp}{dr}=\rho\,\omega^2 r=p\left(\frac{\mu\omega^2}{RT}\right)r$$

Questa equazione, integrata per separazione di variabili, dà

$$p(r) = p_0\, e^{\frac{\mu\omega^2}{2RT} r^2}$$

Sviluppando, poiché $\Delta p \ll p_0$, si ha $p(r) \approx p_0\left(1+\frac{\mu\omega^2}{2RT}r^2\right)$

ovvero: $\rho_s(r) \approx \rho_{s0}\left(1+\frac{\mu\omega^2}{2RT}r^2\right)$ con $\rho_{s0} = p_0\frac{\mu}{RT}$

Dunque l'indice di rifrazione sarà:

$$n(r) = n_0 + kr^2 \quad \text{in cui} \quad n_0 = 1+\alpha\rho_{s0}, \ \text{e} \ k = \frac{\alpha p_0}{2}\left(\frac{\mu\omega}{RT}\right)^2$$

Pertanto, un raggio che passi attraverso il cilindro sarà soggetto ad un cammino ottico tale da prendere una fase $\Delta\varphi' = \frac{\cancel{k}2\pi}{\lambda'}\Delta l$ dove λ' è la lunghezza d'onda della radiazione all'interno del gas e Δl è il tratto breve percorso

Detta λ la lunghezza d'onda in vuoto, si ha:

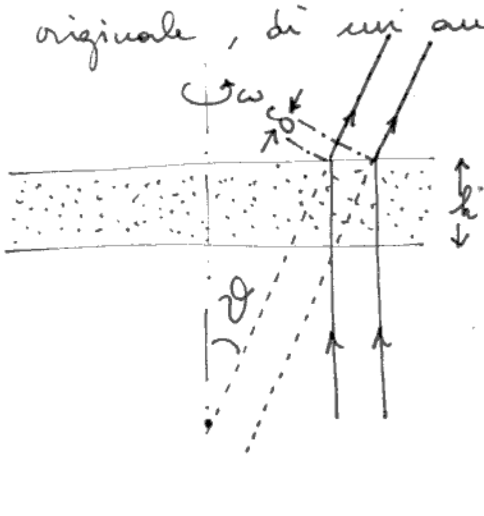
$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

Dunque: $\Delta\varphi' = \frac{2\pi}{\lambda}\underbrace{n(r)\Delta l}$ → cammino ottico equivalente $\Delta l' = \Delta l'(r) = n(r)\Delta l$

Due raggi siti a distanza r ed $r+\Delta r$ dall'asse del fascio LASER avranno acquisito, nell'uscire dal cilindro (ricordando che h è piccolo) uno sfasamento tale da portare a una DIFFERENZA di cammino ottico:

$$\delta = \left[n(r+\Delta r) - n(r)\right] h$$

Tale valore dev'esser uguale alla differenza di cammino dovuta alla deflessione dei raggi, rispetto alla direzione originale, di un angolo ϑ (v. figura sotto), che sarà pari a $\Delta r \sin\vartheta$. Dunque abbiamo:



$$\sin\vartheta = \frac{\left[n(r+\Delta r) - n(r)\right]}{\Delta r}h =$$

$$= 2krh$$

(il $2r$ viene da $\frac{(r+\Delta r)^2 - r^2}{\Delta r} \approx \frac{2r\cancel{\Delta r}}{\cancel{\Delta r}}$)

Questo ci porta alla seguente conclusione: nelle ipotesi di lavoro del problema (ovvero per ϑ piccolo) allora $\vartheta \propto r$, ovverosia il cilindro pieno di gas in rotazione funge da LENTE DIVERGENTE (con una lunghezza focale F tale che $tg\vartheta = \frac{r}{F}$, che in approssimazione di piccoli angoli dà – visto che $tg\,\vartheta \approx \vartheta \approx \sin\vartheta$ – $F = \frac{1}{2kh}$)

Pertanto, l'angolo massimo di deflessione sarà quello dovuti ai raggi di bordo del fascio:

$$\sin\vartheta_{max} = 2kh\, r_{fascio}$$

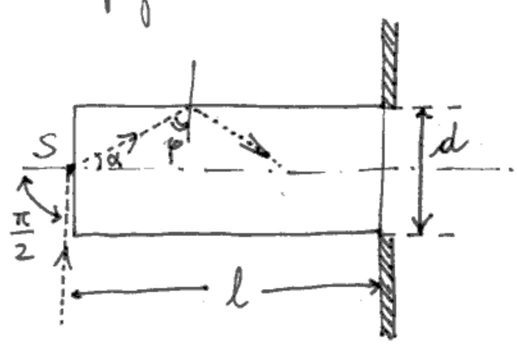
e dunque il raggio dello spot luminoso nello schermo a distanza L è: $R = r_{fascio} + L\, tg\,\vartheta_{max} \approx r_{fascio}(1+2khL)$

Sostituendo:

$$R \simeq r_{fascio}\left[1 + \alpha p_0 h L \left(\frac{\mu\omega}{RT}\right)^2\right]$$

III

L'apparato ottico descritto nel testo del problema è rappresentato in figura:



Si ha:

$$\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

dalle legge di Snell, poi:

$$n \sin\alpha = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

da cui:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 41{,}81^\circ$$

Pertanto, poiché $\alpha < \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{4} > \alpha$ ossia dell'angolo limite. Ergo, si avrà sempre riflessione totale lungo le pareti laterali del cilindro (principio di funzionamento delle fibre ottiche).

In assenza del cilindro, il flusso luminoso che passa pel foro praticato nello schermo è quello emesso in un angolo solido di $\approx \left[\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) \Big/ 4\pi l^2\right] \cdot 4\pi =$

in cui s'è approssimata l'area di base del settore conico ad un cerchio di diametro d. L'aggiunta del cilindro di vetro fa sì che metà dell'angolo sferico di 4π, ovvero 2π steradianti, venga a "confluire" nella fibra ottica. Dunque si avrà un AUMENTO del flusso luminoso attraverso il foro di un fattore

$$f = \frac{2\pi \text{ sr}}{\pi d^2/(4\ell^2)} = 8 \cdot 10^4$$

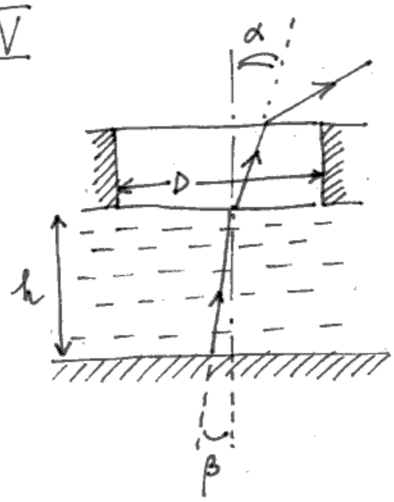
IIII

Dalle considerazioni che si son fatte per il problema precedente si deve avere (utilizzando la medesima notazione) :

$$(1) \qquad \sin\varphi > \sin\varphi_{lim} = \frac{1}{n}$$

poiché $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ con $\sin\alpha = \frac{1}{n}$, segue che; visto che $\sin^2\varphi = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{n^2}$ e voglio, per la (1), che sia maggiore di $\left(\frac{1}{n}\right)^2$, segue che $1 - \frac{1}{n^2_{min}} = \frac{1}{n^2_{min}} \Rightarrow n^2_{min} = 2 \Rightarrow n_{min} = \sqrt{2}$

V



Un osservatore, per quanto s'è rimarcato nei precedenti problemi, può vedere raggi attraverso il vetro i quali abbiano nel vetro un'inclinazione α tale che

$$\sin\alpha < \frac{1}{n_{vetro}}$$

Ora posso applicare anche (a ritroso) la legge di Snell-Cartesio per trovare β:

$$n \sin\beta = n_{vetro} \sin\alpha$$

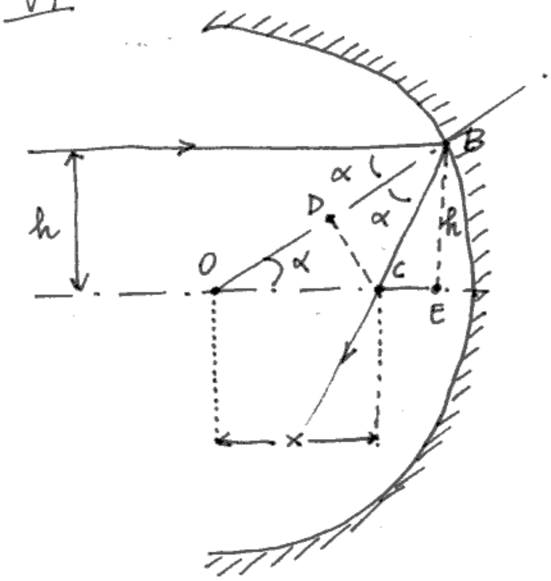
in cui n è l'indice di rifr. dell'acqua. Da ciò segue che, visto che $|\sin\alpha| < \frac{1}{n_{vetro}} \Rightarrow |\sin\beta| < 1/n$ e dunque solo gli oggetti che "emettono" raggi ad angoli $\beta \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$ nel fondo del mare potranno esser visti. Dunque il raggio massimo del campo visivo del fondo del mare, R, sarà tale che

$$\frac{\left(R_{max}-\frac{D}{2}\right)}{h} = tg\,\beta_{max} = \frac{\sin\beta_{max}}{\sqrt{1-\sin^2\beta_{max}}} = \frac{1/n}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

Poiché $\frac{D}{2} \ll R$ (in generale), allora l'area vista sarà

$$S = \pi R_{max}^2 \approx \pi h^2 \frac{1}{n^2-1} \simeq 81,8\ m^2$$

VI



In funzione della distanza h dall'asse, abbiamo, detto R il raggio, che:

$$\sin\alpha = \frac{h}{R} \quad (v.\ \hat{BOE})$$

Poiché OCB è isoscele,

$$\overline{OD} = \overline{DB} = \frac{R}{2}$$

Dunque:

$$x^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha}\sin\alpha\right)^2 = \frac{R^2}{2^2\cos^2\alpha} = \frac{R^4}{2^2\sqrt{R^2-h^2}}$$

$$\boxed{\text{Dunque: } x = x(h) = \frac{R^2}{2\sqrt{R^2-h^2}}}$$

Ergo:

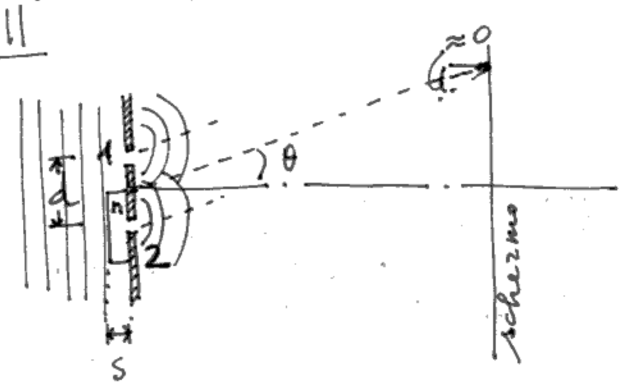
$$x(h_2)-x(h_1) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2-h_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2-h_1^2}}\right)$$

$$\approx \frac{R^2}{2}\left(\frac{1}{R}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{h_2}{R}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\frac{(h_1)^2}{R^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{R}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{100}\right)\right) = \frac{3}{4}\frac{(R=5\,cm)}{100} = 0,0375\ cm$$

Si noti comunque che per $h \approx R$ si va incontro ad una divergenza, e che, comunque, ~~[illegible]~~ tutte le riflessioni multiple a complicare la faccenda.

VII



Il cammino geometrico è definito come

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} r$$

dove λ è la lunghezza d'onda della radiazione nel mezzo specifico mentre r è la distanza percorsa.

Poiché λ è legato al suo valore in vuoto (a parità di frequenza della radiazione - CHE È COSTANTE (a parte eff. Doppler -)) λ_0 dall'indice di rifrazione del mezzo secondo:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Dunque il raggio uscente dal foro (fenditura) 2 guadagnerà uno sfasamento rispetto a quello uscente da 1 dato da

$$\Delta\varphi_{intrinseco} = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)s$$

a ciò si somma quello dovuto alla differenza di cammino ottico, funzione dell'angolo θ di osservazione, pari a $d \sin\theta$ che dà un contributo aggiuntivo

$$\Delta\varphi_{cammino} = \frac{2\pi}{\lambda_0} d \sin\theta$$

Dunque:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{intrinseco} + \Delta\varphi_{cammino} =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[(n-1)s + d\sin\theta\right]$$

Si avrà interferenza costruttiva quando $\Delta\varphi$ è un multiplo di 2π, ovvero per

$$(n-1)s + d\sin\theta = n\lambda_0$$

che è la condizione cercata. Si noti che uno sfasamento intrinseco può esser anche dato dal fatto che la luce può incidere a un angolo $\theta_0 \neq 0$ rispetto alla $\perp$ alle fenditure (piano delle ...)