8 Dimostrare che due angoli aventi i lati rispettivamente perpendicolari sono congruenti se sono della stessa specie, sono supplementari se uno è acuto e l'altro ottuso.

9 Dimostrare che le bisettrici di due angoli alterni interni di rette parallele sono pure parallele.

10 Dimostrare che le bisettrici di due angoli corrispondenti formati da due rette parallele sono pure parallele.

11 Nel triangolo ABC sia BE la bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$, dal punto E si conduca la parallela al lato BC che incontri in D il lato AB. Dimostrare che BD è congruente ad ED.

12 Dimostrare che una parallela alla base di un triangolo isoscele stacca dal triangolo un secondo triangolo isoscele.

13 Dato il triangolo ABC, condotte le bisettrici dei due angoli B e C, dal loro punto d'incontro si conduca la parallela al lato BC che incontri in D e in E i lati AB, AC; dimostrare che DE è congruente alla somma di BD e CE.

14 Dato il triangolo ABC si prolughi il lato AB di un segmento $AE \cong AB$ e il lato AC di un segmento $AD \cong AC$; dimostrare che il segmento DE è congruente e parallelo al lato BC.

15 Se per il punto d'incontro delle bisettrici di due angoli esterni di un triangolo ABC si conduce al parallela al lato AB adiacente ai due angoli, che incontri i prolungamenti dei lati CA e CB rispettivamente in E e in F, il segmento EF è congruente alla somma dei segmenti AE e BF.

16 Si prolunghi la mediana AM di un triangolo ABC del segmento $MD \cong AM$. Dimostrare che BD è parallelo ad AC.

17 Dimostrare che la parallela alla base di un triangolo isoscele condotta per il vertice è bisettrice dell'angolo esterno adiacente all'angolo al vertice.

18 Dimostrare che, se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo è parallela al lato opposto, il triangolo è isoscele.

19 Se due lati di un triangolo si prolungano, dalla parte del vertice comune, ciascuno di un segmento congruente all'altro lato e si uniscono gli estremi coi vertici appartenenti al terzo lato, si ottengono due segmenti paralleli.

20 Dagli estremi di un segmento AB si conducono due rette parallele e su di esse si prendono i due segmenti congruenti AE, BF ma situati da parte opposta rispetto ad AB; dimostrare che il segmento EF dimezza il segmento AB.

21 Dato il triangolo acutangolo ABC si conducano dai vertici A, B, C le perpendicolari rispettivamente ai lati AB, BC, AC; dimostrare che il triangolo formato da tali perpendicolari ha gli angoli congruenti a quelli del triangolo dato.

22 Se da un punto di un lato di un angolo acuto si conducono, dentro l'angolo, le perpendicolari ai lati e la bisettrice dell'angolo formato da queste due

perpendicolari, questa bisettrice stacca dall'angolo dato un triangolo isoscele.

23 Dimostrare che, se in un triangolo isoscele la bisettrice di un angolo adiacente ad un angolo alla base è parallela ad uno dei lati congruenti, il triangolo è equilatero.

24 Dato il triangolo AOB, si prolunghino i lati OA, OB al di là di O di segmenti OA' e OB' rispettivamente congruenti ad OA e OB; dimostrare che le mediane dei due triangoli OAB, $OA'B'$ condotte per O sono congruenti e sulla medesima retta.

25 Per un punto C della bisettrice di un angolo $\widehat{A}$ si conducano le parallele ai lati che incontrano tali lati nei punti B e D; dimostrare che i quattro segmenti AB, BC, CD, AD sono congruenti.

26 Se due angoli hanno i lati paralleli, le loro bisettrici sono parallele o perpendicolari.

27 Se due angoli hanno i lati a due a due perpendicolari, le loro bisettrici sono parallele o perpendicolari.

28 È dato il triangolo isoscele $ABC(AB \cong AC)$. Per un punto qualunque M della base BC si conduca la perpendicolare alla base BC che intersechi le rette dei lati congruenti nei punti P e Q. Dimostrare che il triangolo APQ è isoscele.

29 Nel triangolo ABC si ha $AC \cong BC$; si prendano sul lato AC e sul prolungamento del lato BC i due segmenti congruenti AD e BE e si congiunga D con E. Dimostrare che la base AB del triangolo dimezza il segmento DE.

30 Si conduca la bisettrice AD dell'angolo $\widehat{A}$ di un triangolo qualunque ABC; per un punto qualunque M del lato AC, si conduca la parallela alla bisettrice AD che incontri il prolungamento del lato AB nel punto P. Dimostrare che il triangolo AMP è isoscele.

31 Sia ABC un triangolo qualunque e AD la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$. Per il punto D si conduca la parallela al lato AB che tagli il lato AC nel punto E; poi per il punto E si tracci la parallela alla bisettrice AD che tagli il lato BC nel punto F. Dimostrare che:

1°) il triangolo ADE è isoscele;

2°) la semiretta EF è bisettrice dell'angolo $C\widehat{E}D$.

32 È dato il triangolo ABC nel quale $\widehat{A} \cong 2\,\widehat{B}$; si conducano la bisettrice AD dell'angolo $\widehat{A}$ e successivamente le corde DE parallela ad AB, EF parallela ad AD e FG parallela a DE. Si chiede:

1°) Quali sono gli angoli congruenti all'angolo B?

2°) Quali sono i triangoli isosceli formati e quali sono i segmenti congruenti a due a due?

3°) Quali sono le bisettrici di un angolo della figura?

33 Dimostrare che le bisettrici di due angoli coniugati interni di rette parallele sono perpendicolari.

Dimostrare che in un triangolo isoscele l'angolo che l'altezza relativa ad uno dei lati congruenti forma con la base è congruente alla metà dell'angolo al vertice.

Dimostrare che la bisettrice dell'angolo esterno adiacente all'angolo al vertice di un triangolo isoscele è parallela alla base.

Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un lato e l'altezza.

Sui lati congruenti AB e AC di un triangolo isoscele si prendano due segmenti congruenti $BD \cong CE$. Si congiungano i punti D ed E col punto medio M della base BC. Dimostrare che $ME \cong MD$ e che i due triangoli ADM, AEM sono congruenti.

Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l'angolo al vertice.

Dimostrare che due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti un angolo alla base e la bisettrice di questo angolo.

Se un angolo di un triangolo isoscele è 2/3 di un angolo retto il triangolo è equilatero.

Le bisettrici degli angoli di un quadrangolo, se non passano per uno stesso punto, formano un quadrangolo avente gli angoli opposti supplementari.

Una retta interseca due rette parallele a, b rispettivamente in A e in B. Si prenda, fra A e B, un punto qualsiasi C; sulla a e sulla b dalla stessa parte rispetto ad AB si prendano due segmenti AD e BE rispettivamente congruenti a CA ed a CB. Dimostrare che l'angolo $D\widehat{C}E$ è retto.

Sia dato il triangolo ABC rettangolo in B, si unisca il vertice B con un punto D dell'ipotenusa in modo che sia $D\widehat{B}C \cong D\widehat{C}B$; dimostrare che si ottiene $AD \cong BD \cong DC$.

Dimostrare che se l'angolo al vertice di un triangolo isoscele è la metà di ciascun angolo alla base, la bisettrice di un angolo alla base divide il triangolo dato in due triangoli isosceli.

Dimostrare che l'angolo esterno alla base di un triangolo isoscele è sempre ottuso.

Si prolunghi la base AB del triangolo isoscele ABC del segmento $BD \cong BC$ e si congiunga C con D; dimostrare che l'angolo $C\widehat{D}B$ è metà dell'angolo $C\widehat{A}B$.

In un triangolo la bisettrice di un angolo esterno forma col prolungamento del lato opposto (quando lo incontra) un angolo congruente alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo.

L'angolo ottuso formato da due bisettrici di un triangolo è congruente ad un angolo retto aumentato della metà del terzo angolo del triangolo.

Due altezze di un triangolo acutangolo formano un angolo ottuso, che è supplementare del rimanente angolo del triangolo.

Sia ABC un triangolo rettangolo in B, sull'ipotenusa AC si riportino $AD \cong AB$; $CE \cong BC$ e si conducano BE e BD; dimostrare che l'angolo $D\widehat{B}E$ è la metà di un angolo retto.

Prolungando un lato di un triangolo equilatero di un segmento congruente al lato e congiungendo l'estremo del prolungamento col terzo vertice, si ottiene un triangolo rettangolo.

Dato il triangolo acutangolo isoscele ABC, dal vertice A si conduca la perpendicolare al lato AB fino ad incontrare in D il prolungamento della base BC e da C si conduca la perpendicolare al lato AC che incontri in E il segmento AD; dimostrare che CE è congruente a DE.

Esprimere in frazione dell'angolo retto l'angolo di un poligono equiangolo di 3, 4, 5, 6, 8, 10 lati.

L'angolo esterno di un poligono equiangolo è 1/5 di angolo retto; determinare il numero dei lati del poligono.

Si ha un triangolo rettangolo e si conduce l'altezza relativa all'ipotenusa. Se uno qualunque dei quattro angoli acuti che così si hanno è 1/3 di angolo retto, qual è, in frazione di angolo retto, il valore di ciascuno degli altri tre angoli?

Nel triangolo ABC si congiunga un punto interno O con i vertici B, C; dimostrare che $OB + OC < AB + AC$.

Dimostrare che in un triangolo qualsiasi ciscuna altezza è minore della semisomma dei lati che concorrono nello stesso vertice.

È dato un angolo qualunque $X\widehat{O}Y$. Sul lato OX si prendano due punti A e B ($OA < OB$); sul lato OY si prendano due punti C e D ($OC < OD$). Si congiungano A con D e B con C. Dimostrare che $AB + CD < AD + BC$.

Dimostrare che in un triangolo la somma delle tre altezze è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

Dimostrare che in un triangolo qualuque ciascuna mediana è minore della semisomma dei due lati che concorrono nello stesso vertice (*prolungare la mediana di un segmento congruente ad essa dalla parte opposta del triangolo rispetto al suo punto d'incontro col lato*).

Dimostrare che in un triangolo qualunque la somma delle tre mediane è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro del triangolo.

Dimostrare che se due lati di un triangolo sono disuguali, l'altezza, uscente dal vertice ad essi comune, forma col lato maggiore un angolo maggiore di quello che forma col lato minore.

Dimostrare che il segmento che unisce il vertice di un triangolo isoscele con un punto della base è minore di ciascuno dei lati congruenti.

64 Dimostrare che il segmento che unisce il vertice di un triangolo isoscele con un punto del prolungamento della base è maggiore di ciascuno dei lati congruenti.

65 Dimostrare che gli estremi di un segmento sono equidistanti da una qualunque retta passante per il punto medio del segmento.

66 Dimostrare che se in un triangolo la mediana relativa ad un lato è congruente alla metà del lato stesso il triangolo è rettangolo.

67 Dimostrare che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

68 Dimostrare che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa.

69 Dimostrare che, in due triangoli congruenti, le altezze relative a lati rispettivamente congruenti sono congruenti.

70 Se sulla stessa base si costruiscono tre triangoli isosceli ACB, ADB, AEB, i vertici C, D, E sono allineati.

71 Dimostrare che in un triangolo isoscele le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

72 Dimostrare che due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti un lato e le altezze relative agli altri due lati.

73 Nel triangolo ABC si uniscano i vertici con un punto interno O e si dimostri che $OA + OB + OC$ è minore del perimetro e maggiore del semiperimetro.

74 In ogni triangolo la congiungente un vertice con un punto qualunque del lato opposto è minore di uno almeno degli altri due lati.

75 Se in un triangolo rettangolo un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è doppia del cateto minore (*costruire un triangolo congruente al dato da parte opposta del cateto minore* ...).

76 Si dividano in tre parti congruenti i tre lati di un triangolo equilatero e si congiungano i punti che occupano lo stesso posto; il triangolo che si ottiene è pure equilatero e i suoi lati sono perpendicolari a quelli del primo.

77 Dimostrare che la somma delle diagonali di un quadrilatero è maggiore del semiperimetro, ma minore del perimetro.

78 In ogni poligono ciascun lato è minore della somma di tutti gli altri (*Si conducano da uno degli estremi del lato considerato tutte le possibili diagonali del poligono* ...).

79 Dimostrare che il perimetro di un poligono convesso è maggiore del perimetro di qualunque altro poligono convesso contenuto nel primo. (*Prolungare, tutti da una stessa parte, i lati del poligono interno fino ad incontrare i lati del poligono esterno ed applicare il teorema dell'esercizio precedente n.* 78).

80 Se dagli estremi A, B della base del triangolo isoscele ABC si conducono le perpendicolari alla base stessa sino ad incontrare in D e in E la parallela alla base condotta dal vertice C, i due triangoli CAD, CBE sono congruenti.

81 Se sui lati di un angolo, a partire dal vertice, si prendono due segmenti congruenti $OA \cong OB$, le perpendicolari ai lati stessi condotte da A e da B si incontrano sulla bisettrice dell'angolo dato.

82 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruente l'angolo al vertice e la mediana relativa alla base.

83 Dimostrare che l'angolo formato dalle bisettrici di due angoli di un triangolo equilatero è doppio di ciascun angolo del triangolo.

84 Dimostrare che in un triangolo isoscele una retta perpendicolare alla base incontra le rette dei lati congruenti in due punti equidistanti dal vertice.

85 Se in un triangolo la mediana di un lato è anche l'altezza, il triangolo è isoscele.

86 Se in un triangolo l'altezza relativa ad un lato è pure bisettrice dell'angolo opposto, il triangolo è isoscele.

87 Se in un triangolo la mediana di un lato è pure bisettrice dell'angolo opposto, il triangolo è isoscele.

88 Se un angolo è 2/3 di angolo retto, la proiezione di un segmento appartenente ad uno dei suoi lati sulla retta dell'altro lato è congruente alla metà del segmento.

89 Dimostrare che la proiezione di un segmento su una retta è minore, o al più congruente, al segmento stesso.

90 In due triangoli rettangoli aventi un cateto rispettivamente congruente è maggiore l'ipotenusa formante col cateto considerato angolo maggiore.

91 Se due triangoli rettangoli hanno le ipotenuse congruenti e un cateto del primo triangolo maggiore di un cateto del secondo, il rimanente cateto del primo è minore del rimanente cateto del secondo.

92 Ogni perpendicolare alla bisettrice di un angolo forma coi lati di tale angolo un triangolo isoscele.

93 Dimostrare che il punto medio della base di un triangolo isoscele è equidistante dai lati congruenti.

94 Dimostrare che due punti della base di un triangolo isoscele equidistanti dal suo punto medio sono equidistanti dai lati congruenti.

95 Quando due triangoli isosceli hanno la base in comune e i vertici da una stessa banda della base comune, i prolungamenti dei lati congruenti di un triangolo tagliano i lati congruenti dell'altro in due punti equidistanti dalla base e simmetrici rispetto all'altezza.

96 Dato il triangolo isoscele ABC di base BC ed i punti $M \in AB$ ed $N \in AC$ equidistanti da A, dimostrare che il segmento PQ avente per estremi i piedi delle perpendicolari tracciate da M ed N rispettivamente ad AC e ad AB è parallelo alla base BC.

97 Dimostrare che se due rette intersecano i lati di un angolo in coppie di punti equidistanti dal vertice, sono parallele.

98 Due triangoli, aventi un'altezza e due angoli rispettivamente congruenti, sono congruenti.

99 Dato il triangolo ABC, si prolunghi il lato AB, oltre B, di un segmento $BD \cong BC$ e sempre il lato AB, ma oltre A, di un segmento $AE \cong AC$; si congiunga poi C con D e con E.
Dimostrare che, nel triangolo ECD, gli angoli adiacenti al lato ED sono rispettivamente congruenti alla metà degli angoli adiacenti al lato AB nel triangolo ABC dato.

100 Nel triangolo ABC, sia D il punto d'incontro del lato AC con la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$. Dimostrare che si ha $AB > AD$ e $BC > DC$.

101 In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è pure mediana e bisettrice dell'angolo al vertice.

102 La bisettrice dell'angolo A di un triangolo qualunque ABC forma col lato BC due angoli, la cui differenza è congruente a quella dei due angoli di vertice B e C adiacenti al lato BC.

103 Dato il triangolo ABC rettangolo in A, nel semipiano di origine AC contenente B si tracci il segmento $CD \cong AC$ e perpendicolare ad AC. Dimostrare che AD è bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$.

104 Nel triangolo ABC si prolunghi il lato AB, dalla parte di A, di un segmento $AD \cong AC$ e si congiunga D con C. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$ è parallela a CD.

105 È dato il triangolo ABC rettangolo in A. Si prolunghi BA di un segmento $AD \cong AC$ e CA di un segmento $AE \cong AB$. Il prolungamento dell'altezza AH del triangolo ABC incontra DE nel punto M. Dimostrare che:

1°) i due triangoli ABC e AED sono congruenti;

2°) i due triangoli AMD e AME sono isosceli;

3°) M è il punto medio di ED.

106 Sono dati i due angoli adiacenti $X\widehat{O}Y$ e $X\widehat{O}Z$ e le loro bisettrici rispettive OM e ON; da un punto qualunque A della semiretta OX si conducono le perpendicolari ad OM e ad ON che tagliano le rette OY e OZ in B e in C. Dimostrare che:

1°) l'angolo $B\widehat{A}C$ è retto;

2°) i due triangoli OAB, OAC sono isosceli;

3°) O è il punto medio di BC.

107 Per il vertice A del triangolo isoscele ABC, rettangolo in A, si conduca una retta qualunque MN esterna al triangolo, e si abbassino su questa le perpendicolari BD e CE.

1°) Dimostrare che i due triangoli BDA e CAE sono congruenti e concludere che $BD + CE \cong DE$.

2°) Nel caso particolare che CE sia 1/2 AC, determinare le misure degli angoli del quadrilatero $BCED$.

3°) Se la retta MN attraversasse il triangolo, quale relazione vi sarebbe fra i segmenti BD', $E'C$ e $D'E'$? [$\pm BD' \mp CE' \cong D'E'$]

108 È dato il triangolo BAC; dal vertice A e dalla parte del lato AC si conduca la perpendicolare ad AB e su di essa si prenda $AD \cong AB$. Analogamente da A si conduca dalla parte di AB la perpendicolare al lato AC e su di essa si prenda $AE \cong AC$. Dimostrare che l'altezza AH del triangolo DAE è mediana del triangolo ABC. (*Si conduca da* B *la parallela al lato* AC *che incontri il prolungamento di* AH *in* A′ *e si considerino i due triangoli* EAD *e* A′BA ...).

109 Sulla base BC di un triangolo acutangolo ABC, si prenda un punto D e per i punti medi M ed N di DB e di DC si conducano le perpendicolari a BC, che incontrino le rette AB e AC rispettivamente in E e in E'. Dimostrare che l'angolo $B\widehat{A}C$.

110 È dato un triangolo ABC in cui $\widehat{A} \cong 2\,\widehat{B}$. Si prenda sul lato AB un punto qualunque M; si prolunghi CA di un segmento $AD \cong AM$, infine si conduca la retta DM che incontri BC nel punto N. Dimostrare che:

1°) $A\widehat{B}C \cong A\widehat{D}M \cong A\widehat{M}D$;

2°) $MN \cong NB$;

3°) $C\widehat{N}M \cong B\widehat{A}C$.

111 Costruire il triangolo $AB'C$ simmetrico del triangolo dato ABC rispetto alla retta del lato AC e dimostrare la congruenza dei due triangoli.

112 Sia r la retta perpendicolare in B al lato AB del triangolo ABC: assumendo r come asse di simmetria costruire il triangolo simmetrico del dato e dimostrare la loro congruenza.

113 È dato un triangolo ABC e sia r la retta passante per B parallela al lato AC; costruire il triangolo simmetrico di ABC rispetto ad r e dimostrare la congruenza dei due triangoli.

114 È dato il triangolo ABC isoscele sulla base AB: sia r la retta a cui appartiene l'altezza del triangolo relativa al lato BC.
Assumendo r come asse di simmetria, disegnare il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC e dimostrare che:

1°) $A'B'C'$ è un triangolo isoscele,

2°) $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}'C'$ sono triangoli congruenti.

115 Nello stesso semipiano determinato da una retta r passante per un punto A, sono dati due punti B e C non appartenenti ad r. Costruire i punti A', B', C' simmetrici, rispetto alla retta r, rispettivamente dei punti A, B, C e dimostrare la congruenza dei due triangoli, simmetrici rispetto ad r, ABC e $A'B'C'$.