2 SORGENTI SONORE

PROBLEMA 1
GARA 2° LIVELLO 2007.

S_1 ed S_2 emettono un segnale sinusoidale, che ha espressione matematica (si dice "espressione analitica"):

$$f_1(t) = A_{1MAX} \sin(\alpha_1 t + \phi_1)$$
$$f_2(t) = A_{2MAX} \sin(\alpha_2 t + \phi_2)$$

Poiché sono in fase:

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

Al tempo $t = 0$, e in nessun altro istante successivo, il problema si dice dove le onde hanno valori fissati.
Scelgo allora per il valore iniziale $\phi = 0$:

$$\begin{cases} \theta(t) = \alpha t + \phi \\ \theta(0) = \phi \end{cases}$$

così che $\theta(0) = 0$.
Faccio questa scelta per semplificare i conti.

CALCOLO DELLA PULSAZIONE α.

Poiché la frequenza è $f = 430\ Hz$, significa che nell'unità di tempo ($1s$) le sorgenti emettono 430 onde complete.
Dunque per emettere 1 sola onda servono:

$$t^* = \frac{1}{430}\ s$$

Ciò significa che la funzione seno ha compiuto un periodo, e il suo argomento è progredito di 2π:

$$\alpha t + 2\pi = \alpha(t + t^*)$$
$$2\pi = \alpha t^*$$

$$\alpha = 2\pi f$$

dunque le equazioni sono:

$$f_1(t) = A_{1MAX} \sin(2\pi f\, t)$$

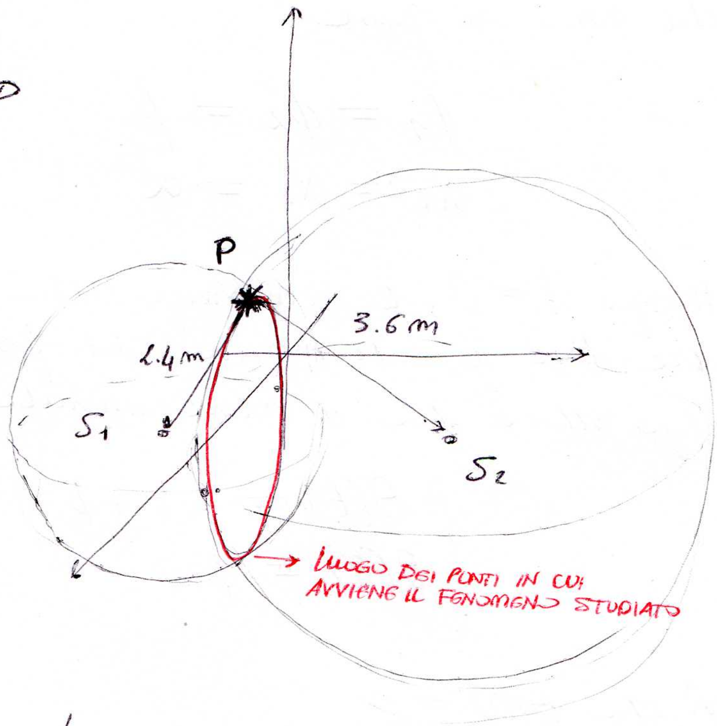
$$f_2(t) = A_{2MAX} \sin(2\pi f\, t)$$

1

CALCOLO DELLO SFASAMENTO NEL PUNTO P.

Le onde si propagano di moto rettilineo uniforme.

Dunque per raggiungere il punto P dalle sorgenti occorrerà un tempo:



$$t_1 = \frac{R_1}{v} = \frac{2.4\ m}{344\ \frac{m}{s}}$$

$$t_2 = \frac{R_2}{v} = \frac{3.6\ m}{344\ \frac{m}{s}}$$

Lo sfasamento è la differenza tra gli argomenti delle funzioni sinusoidali:

$$\Delta\theta = \left| 2\pi f\, t_1 - 2\pi f\, t_2 \right|$$

$$= \left| 2\pi f \frac{R_1 - R_2}{v} \right|$$

$$= \left| 2\pi\, 430 \frac{(-1.2)}{344} \right|$$

$$\Delta\theta = 3\pi$$

②

CALCOLO DELL'AMPIEZZA RELATIVA DEL PRIMO SEGNALE RISPETTO AL SECONDO IN P.

L'intensità di un suono in un punto è la quantità di energia che attraversa la superficie infinitesima intorno al punto in 1s.

In questo caso è la stessa su tutti i punti della superficie sferica con centro nella sorgente:

$$I_1 = \frac{P_1}{4\pi R_1^2}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{4\pi R_2^2}$$

Le sorgenti hanno la stessa potenza:

$$P_1 = P_2 = P$$

Segue:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{P}{4\pi R_1^2} \cdot \frac{4\pi R_2^2}{P}$$

Le intensità sono anche direttamente proporzionali al quadrato dell'ampiezza dell'onda:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

Segue:

$$\frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

$$A_1 = \frac{R_2}{R_1} A_2 = \frac{3}{2} A_2$$

③

AMPIEZZA DEL SEGNALE RISULTANTE.

Poiché le onde sono in opposizione, le ampiezze si sottraggono.

$$A^*_{TOT} = A_1 - A_2 = +\frac{1}{2}A_2$$

L'ampiezza non tiene conto del segno: è una distanza (la distanza dalla posizione di riposo $A_0 = 0$):

$$A_{TOT} = |A^*_{TOT}| = \frac{1}{2}A_2$$

④

INTENSITÀ DEL SEGNALE SE SI SPEGNE IL SECONDO.

Come già detto, l'intensità è direttamente proporzionale all'ampiezza del segnale nel punto P:

$$I = k A_{TOT}^2 = k\left(\frac{1}{2}A_2\right)^2$$

Se spengo S_2, conto solamente l'ampiezza del primo segnale:

$$I^* = k(A_1)^2 = k\left(\frac{3}{2}A_2\right)^2$$

Dunque:

$$I^* = k\frac{9}{4}A_2^2$$

$$= 9\left(k\frac{1}{4}A_2^2\right)$$

$$= 9\left[k\left(\frac{1}{2}A_2\right)^2\right]$$

$$I^* = 9I$$

ONDE IN ARRIVO

PROBLEMA (3)
GARA 2° LIVELLO 2008

La sorgente è puntiforme (dunque il segnale non è combinazione "strana" di funzioni sinusoidali dovute alle emissioni in punti dello spazio diversi):

$$f(t) = A_{MAX} \sin(\alpha t + \phi)$$

Il segnale è isotropo: viene emesso con le stesse caratteristiche in tutte le direzioni:
Dunque l'intensità sulle superfici sferiche centrate nell'origine è uniforme sulla stessa superficie sferica:

$$I(P) \equiv I_R$$
$$\forall P \equiv (x, y, z) / x^2+y^2+z^2 = R^2$$

Ricordo che la intensità di un segnale è l'energia che attraversa una superficie nell'unità di tempo (1 s), per unità di superficie.
Cioè la potenza che attraversa la superficie unitaria:

$$I = \frac{E}{S} \cdot \frac{1}{t} = \frac{E}{t} \cdot \frac{1}{S} = \frac{P}{S}$$

All'inizio l'osservatore è a distanza R_0.
All'istante t_1 è a distanza $R_0 - 3.5\ m$, cioè ridotta perché si è avvicinato:

$$\begin{cases} I_0 = \dfrac{P}{4\pi R_0^2} \\ I_0 = 2.40\ \dfrac{mW}{m^2} \\ I_1 = \dfrac{P}{4\pi (R_0 - 3.5m)^2} \\ I_1 = 4.11\ \dfrac{mW}{m^2} \end{cases}$$

Segue:

$$\left(2.40\ R_0^{\,2}\right) mW = 4.11\left(R_0 - 3.50\right)^2\ mW$$

$$1.71\ R_0^2 - 28.77\ R_0 + 50.35 = 0$$

$$R_0 \simeq \frac{28.77 \pm 21.93}{3.42}$$

Se fosse $R_0 \simeq 2.00\ m$ non potrei avvicinarmi alla sorgente di $3.50\ m$.
Dunque $R_0 \simeq 14.85\ m$.

Posso allora calcolare la potenza:

$$\begin{cases} R_0 = 14.85\ m \\ P = I_0 \cdot 4\pi R_0^2 \\ I_0 = 2.40\ \frac{mW}{m^2} \end{cases}$$

Segue:

$$P \simeq 6.65\ W$$

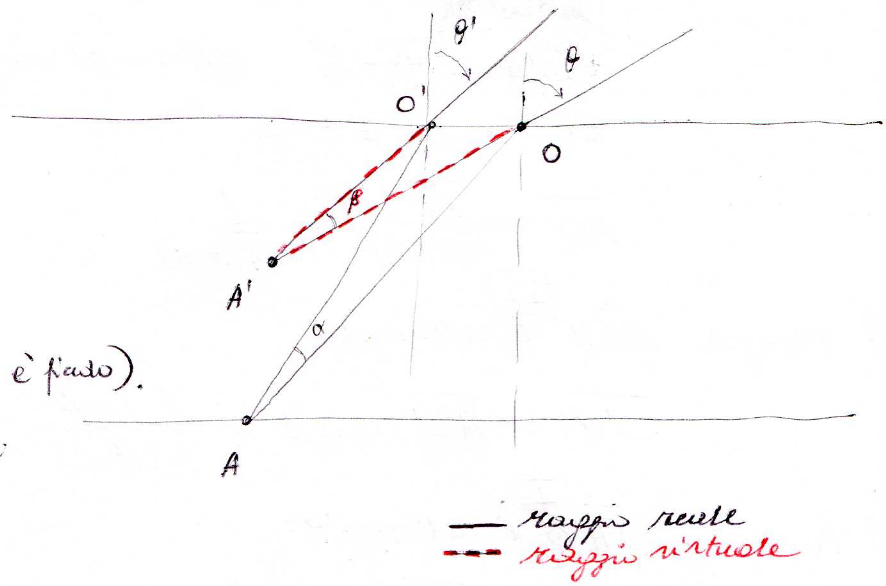
ESPLORANDO IL FONDO

PROBLEMA ③
GARA NAZIONALE 2010

Come si forma l'immagine di A, cioè A'?

Il raggio OA è più "orizzontale" del raggio O'A, dunque l'angolo θ di rifrazione sarà più ampio di θ' (essendo α piccolo, anche $\theta-\theta'=\beta$ è piccolo).

Nell'intersezione dei prolungamenti dei raggi rifratti sta A'.



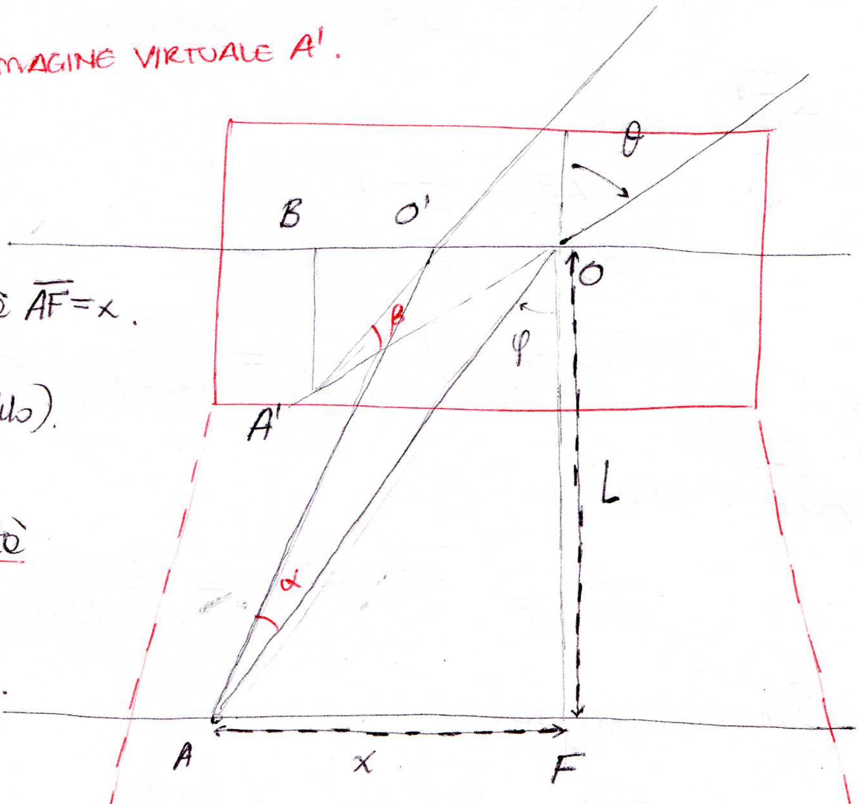
①
CALCOLO DELLA PROFONDITÀ DELL'IMMAGINE VIRTUALE A'.

La profondità dell'immagine virtuale è $\overline{A'B}=l$.

La profondità della vasca è $\overline{OF}=L$

La distanza dell'oggetto A dalla verticale è $\overline{AF}=x$.

Vogliamo calcolare l in funzione di L, x, n (indice di rifrazione del liquido).



Sfrutteremo le seguenti proprietà goniometriche:

- α, β "piccoli"

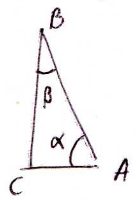
$\Longrightarrow$ valgono le approssimazioni

$\sin\alpha \simeq \alpha \qquad \sin\beta \simeq \beta$

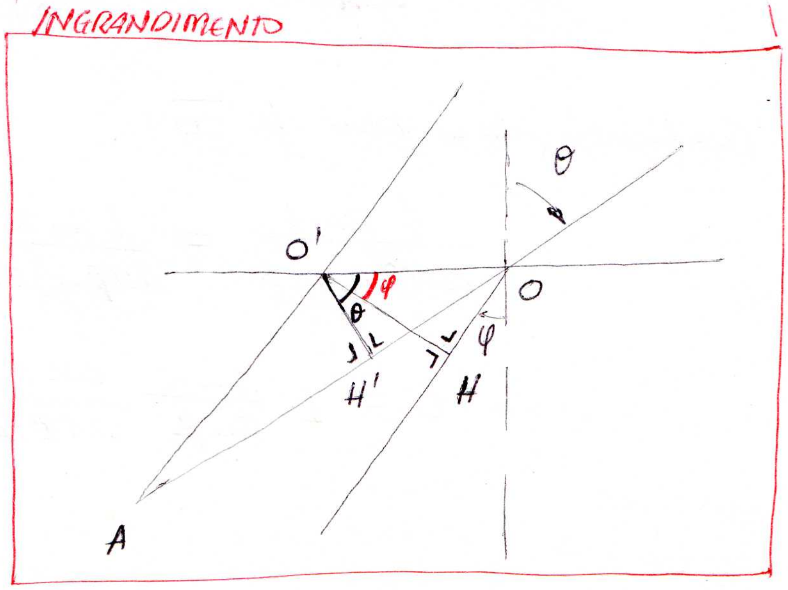
$\cos\alpha \simeq 1 \qquad \cos\beta \simeq 1$

$\theta+\alpha \simeq \theta \qquad \theta+\beta \simeq \theta$

e le seguenti proprietà trigonometriche dei triangoli rettangoli:



- $\overline{AB}\cdot\sin\beta = \overline{AB}\cdot\cos\alpha = \overline{AC}$
- $\overline{AB}\cdot\cos\beta = \overline{AB}\cdot\sin\alpha = \overline{BC}$



Calcoliamo l in funzione degli angoli di incidenza (φ) e di rifrazione (θ).

SFRUTTIAMO IL FATTO CHE $\overline{OO'}$ È UN SEGMENTO DI CUI POSSIAMO CALCOLARE LA LUNGHEZZA IN 2 MODI.

- Nel triangolo $\overset{\triangle}{A'BO'}$: I1

$$B\hat{O}'A' = \frac{\pi}{2} - \theta' \quad \text{(opposto al vertice)}$$

$$B\hat{A}'O' = \theta' = \theta - \beta$$

$$\overline{A'O'} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\theta-\beta)} = \frac{l}{\cos(\theta-\beta)}$$

I2

Il triangolo $\overset{\triangle}{A'O'H'}$ è rettangolo:

USO 3 TRIANGOLI IN OGNI PASSAGGIO

$$\overline{O'H'} = \overline{A'O'} \cdot \sin\beta = \frac{l \sin\beta}{\cos(\theta-\beta)}$$

I3

Il triangolo $\overset{\triangle}{O'H'O}$ è rettangolo:

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{O'H'}}{\cos\theta} = \frac{l \sin\beta}{\cos(\theta-\beta)\cos\theta}$$

II1

- $\overset{\triangle}{AOF}$ è rettangolo:

$$O\hat{A}F = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$O'\hat{A}F = \frac{\pi}{2} - \varphi + \alpha$$

$$\overline{AO'} = \frac{\overline{OF}}{\sin(-\varphi+\alpha+\frac{\pi}{2})} = \frac{\overline{OF}}{\cos(-\varphi+\alpha)} = \frac{\overline{OF}}{\cos(\varphi-\alpha)} = \frac{L}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

II2

$\overset{\triangle}{AO'H}$ è rettangolo:

$$\overline{O'H} = \overline{AO'} \cdot \sin\alpha = \frac{L \sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}$$

II3

$\overset{\triangle}{OO'H}$ è rettangolo:

$$\overline{OO'} = \frac{\overline{O'H}}{\cos\varphi} = \frac{L \sin\alpha}{\cos\varphi\cos(\varphi-\alpha)}$$

- Confronto i due valori di $\overline{OO'}$:

$$\frac{l \sin\beta}{\cos(\theta-\beta)\cos\theta} = \frac{L \sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)\cos\varphi}$$

$$l = L \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \frac{\cos\theta(\cos(\theta-\beta))}{\cos\varphi(\cos(\varphi-\alpha))} \simeq L \frac{\alpha}{\beta} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\varphi}$$

per le proprietà goniometriche di angoli "piccoli"

Vogliamo ora eliminare la dipendenza dagli angoli φ e θ.
Usiamo la legge di Snell per la rifrazione:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = n$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\varphi} = n^2$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos^2\varphi} = n^2$$

$$\cos^2\theta = 1 - n^2(1-\cos^2\varphi)$$
$$= n^2\cos^2\varphi - (n^2-1)$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\varphi} = n^2 - \left(\frac{n^2-1}{\cos^2\varphi}\right)$$
$$= n^2 - (n^2-1)\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)$$
$$= n^2 - (n^2-1)\left(\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)$$
$$= n^2 - (n^2-1)(1+tg^2\varphi)$$

$$\boxed{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\varphi} = 1 + (1-n^2)(tg^2\varphi)}$$

Poiché $\theta-\beta \simeq \theta$, $\varphi-\alpha \simeq \varphi$, vale ancora la legge di Snell:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\varphi-\alpha)} = n \\ \dfrac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\varphi-\alpha)} = \dfrac{\sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta}{\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha} \simeq \dfrac{\sin\theta - \cos\theta\,\beta}{\sin\varphi - \cos\varphi\,\alpha} \end{cases}$$

$$n\sin\varphi - n\cos\varphi\,\alpha = \sin\theta - \cos\theta\,\beta$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\,\frac{1}{n}}$$

Dunque:

$$\boxed{\ell = \frac{L}{n}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\right)^3} \quad (1)$$

Poiché il triangolo $A\hat{O}F$ è rettangolo:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{OF}} = \frac{x}{L} = \operatorname{tg}\varphi$$

Segue:

$$\boxed{\ell = \frac{L}{n}\left(\sqrt{1-(n^2-1)\left(\frac{x}{L}\right)^2}\right)^3} \quad (2)$$

(2)

CALCOLO DELLE PROFONDITÀ MINIMA E MASSIMA DELL'IMMAGINE A'.

Più il raggio rifratto uscente da O si appiattisce sulla superficie, più l'immagine A' "risale".

ℓ_{MIN} si avrà per $\theta = 90°$.

Se $\theta = 90° \Longrightarrow \cos\theta = 0 \wedge \sin\theta = 1$

Dalla (1) segue che $\ell_{MIN} = 0$

(la legge di Snell mi assicura che in (1) sia $\sin\varphi \neq 0$ perché $\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = n$ ma $\sin\theta = 1$ e $\sin\varphi = \frac{1}{n} > 0$, con $n > 1$. Dunque $\varphi \neq 90°$)

La profondità dell'immagine è massima se guardo l'immagine "da sopra" (cioè è sulla verticale, $x = 0$).

Dalla (2) segue che $\ell_{MAX} = \frac{L}{n}\left(\sqrt{1}\right)^3 = \frac{L}{n}$.

(3)

AREA SOMMERSA VISIBILE: QUANTO VALE?

Poiché la profondità ℓ è un numero reale, un radicando < 0 indica che non posso vedere alcuna immagine.

Il raggio max di visuale si ha per radicando $= 0$:

$$1 - (n^2-1)\frac{x_{max}^2}{L^2} = 0$$

$$x_{max}^2 = \frac{L^2}{n^2-1}$$

L'area massima del fondo è un cerchio di raggio $R = x_{max}$:

$$A = \pi x_{max}^2 = \frac{\pi L^2}{n^2-1}$$

FASCI COLORATI

PROBLEMA 2
GARA NAZIONALE 2009
(TRACCIA 1)

- Indico con l'apice ' le quantità nel vetro.

$$V = V'$$

$$v = n v'$$

$$v = \lambda V \Longrightarrow \frac{v'}{V} = \lambda'$$

D: Come muta al crescere della lunghezza d'onda?

$$\lambda' = \frac{v}{V}\frac{1}{n}$$

R: si rimpicciolisce n

- Devo calcolare a e b, le incognite del mio sistema.

$$n_i = a + \frac{b}{\lambda_i^2}$$

$$\lambda_i^2 n_i - \lambda_i^2 a = b$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\lambda_1^2 n_1 - \lambda_2^2 n_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \\ b = \lambda_1^2 n_1 - \lambda_1^2 a = \lambda_1^2 \dfrac{\lambda_2^2 (n_2 - n_1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \end{cases}$$

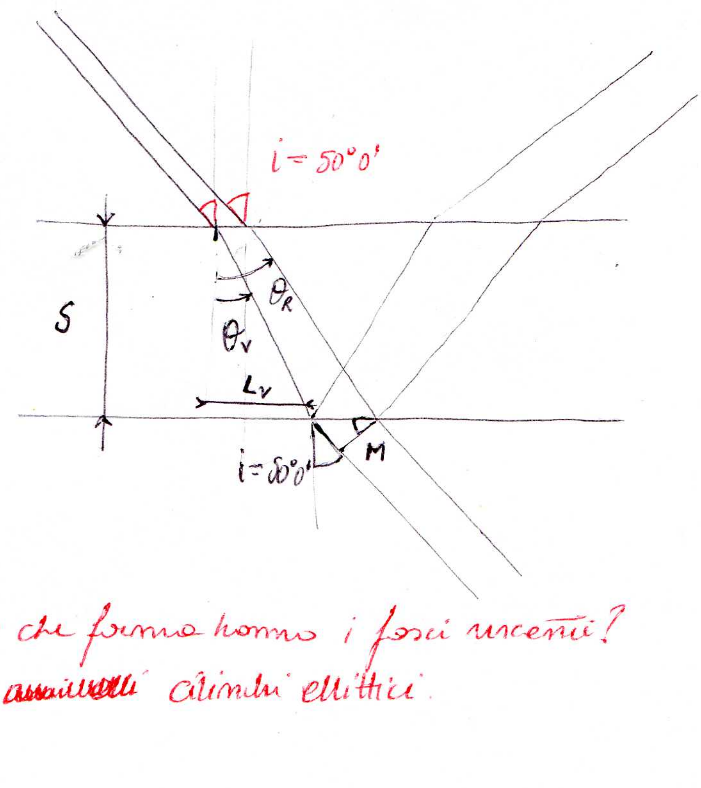
- Legge di Snell:

$$\frac{\sin\theta}{\sin i} = \frac{1}{n}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$$

$$L = s(\operatorname{tg}\theta)$$

$$M = \Delta L \cdot (\cos i)$$



D: che forma hanno i fasci uscenti?
R: ~~cilindri~~ cilindri ellittici.