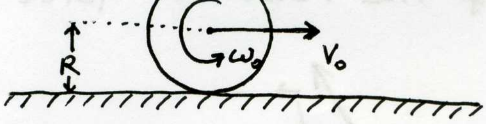
Problema (da "The Feynman Lectures on Physics")

An amusing trick is to press a finger down on a marble, on a horizontal table top, in such a way that the marble is projected along the table with an initial linear speed V_0 and an initial <u>backward</u> rotational speed ω_0, ω_0 being about a horizontal axis perpendicular to V_0. The coefficient of sliding friction between marble and table top is constant. The marble has radius R.

(a) What relationship must hold between V_0, R, and ω_0 for the marble to slide to a complete stop?

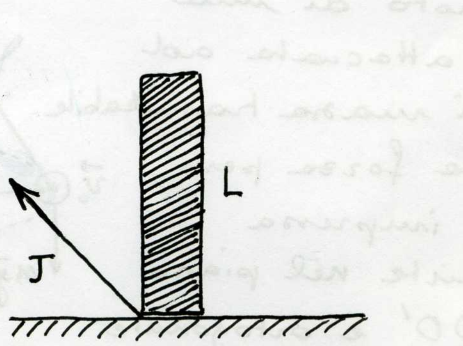
(b) What relationship must hold between V_0, R and ω_0 for the marble to skid to a stop and then start returning towards its initial position, with a final <u>constant</u> linear speed of $3/7\, V_0$?

[Figure representing the initial state]



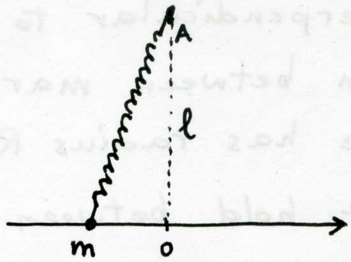
Problema (da "The Feynman Lectures on Physics")

An upright rod of mass M and length L is given an impulse J at its base, directed at 45° upward from the horizontal, which sends the rod flying. What value(s) should J have so that the rod lands <u>vertically</u> again (i.e. upright on the end at which J was applied)?



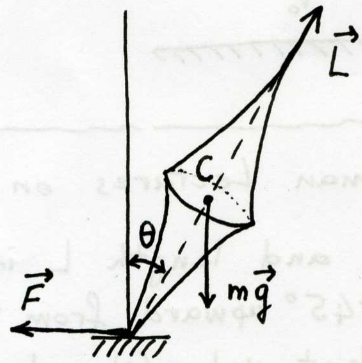
Problema (da "Meccanica", L. D. Landau e E. M. Lifšic)

Trovare la frequenza delle oscillazioni di un punto con massa m, suscettibile di moto su una retta e attaccato a una molla avente l'altro estremo fissato in un punto A. La molla, quando la sua lunghezza é l, é tesa da una forza F_0.



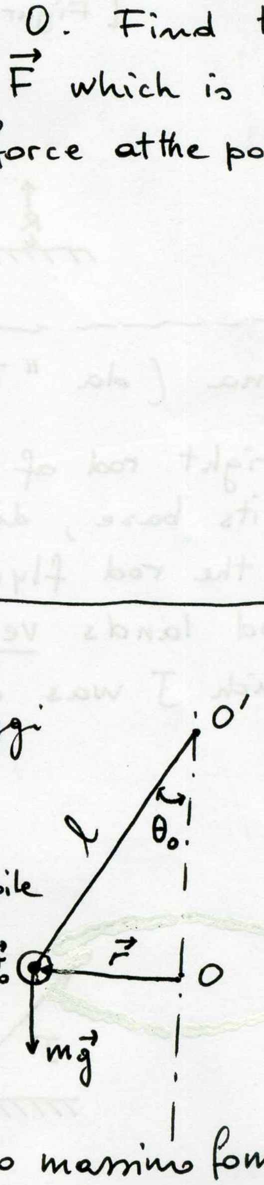
Problema (da "Fundamental laws of Mechanics", I. E. Irodov)

A spinning top of mass m whose axis forms an angle θ with the vertical precesses about the vertical axis passing through the point of support O. The angular momentum of the top is equal to L, and its centre of inertia is located at the distance l from the point O. Find the magnitude and direction of the vector $\vec{F}$ which is the horizontal component of the reaction force at the point O.



Problema: pendolo 3D

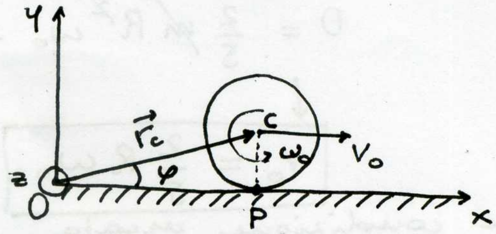
Studiare, utilizzando le opportune leggi di conservazione, il moto di una pallina di massa m, attaccata ad un filo inestensibile di massa trascurabile lungo l, soggetta alla forza peso, quando ad essa viene impressa una velocità $\vec{v}_0$ giacente nel piano ortogonale all'asse OO' e ortogonale al raggio vettore $\vec{r}$ in modo che l'angolo massimo formato sia 90°



Soluzioni

Problema della bilia

Consideriamo un sistema di riferimento come in figura



L'unica forza esterna non compensata è quella di attrito radente nel punto di contatto P della bilia con la superficie, rispetto al quale non compie momento.

Si noti che lo stesso si ottiene andando a calcolare ~~[illegible]~~ il risultante dei momenti delle forze rispetto al punto O, scelto come origine del sistema di riferimento inerziale del laboratorio. Infatti:

$$\vec{M}_O^{\,f.\,peso} = \vec{r}_C \times m\vec{g} = -|\vec{r}_C|\, m g \sin\varphi\ \hat{z}$$

$$\vec{M}_O^{\,f.\,reaz.} = \vec{r}_P \times (-m\vec{g}) = +\,|\vec{r}_C|\, m g \sin\varphi\ \hat{z}$$

$$\vec{M}_O^{\,f.\,attrito} = \vec{r}_P \times \vec{f}_{Attr.} = \vec{0} \quad (\text{perché } \vec{r}_P \parallel \vec{f}_{Attr.})$$

dunque il risultante dei momenti è il vettore nullo, e il momento angolare si CONSERVA (rispetto al sist. del lab.)

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times \vec{p}$$

Inizialmente

$$\left|\vec{L}_O^{\,iniz.}\right| = I_C\omega_0 - r_C \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) m V_0 =$$

$$= I_C\omega_0 - m R V_0$$

Poiché $I_C^{(sfera)} = \frac{2}{5} m R^2 \implies \vec{L}_O^{\,iniz} = \frac{2}{5} m R^2 \omega_0 - m R V_0$

ipotesi:

$$v_4^{fin} = \frac{3}{7} V_0$$

Si ha:

$$\frac{2}{5}\cancel{m}R^2\omega_0 - R\cancel{m}V_0 = \frac{2}{5}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\frac{3}{7}\frac{V_0}{\cancel{R}} + R\cancel{m}\frac{3}{7}V_0$$

da cui:

$$\frac{2}{5}R\omega_0 = \frac{35+6+15}{35}V_0 = \frac{56}{35}V_0 = \frac{8\cdot 7}{5\cdot 7}V_0$$

e infine:

$$\boxed{V_0 = \frac{1}{4}R\omega_0}$$

Problema del rod:

Eq. del momento angolare: (1) $I_c\omega = \mathcal{L} \Rightarrow \frac{1}{12}mL^2\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}J\cdot\frac{L}{2}$

tempo totale di volo: $g\frac{T}{2} = v_0 = \frac{J/\sqrt{2}}{m} \Rightarrow T = \frac{2v_0}{g} = \frac{\sqrt{2}J}{mg}$

in tale periodo voglio che compia un numero intero di giri:

$\theta^{tot} = 2\pi n \longrightarrow \omega = \frac{2\pi n}{T} = \frac{\sqrt{2}\,\pi n\, mg}{J}$ che sostituisco in (1):

$$\frac{1}{3}mL\omega = \sqrt{2}J \Rightarrow \frac{1}{3}mL\frac{\sqrt{2}\pi n mg}{J} = \sqrt{2}J \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{J = m\sqrt{\frac{1}{3}n\pi g L}}$$

$$x_{cm} = \frac{m \frac{L}{2}\left(1 + \left(1 + \frac{L}{a}\right) + \left(1 + 2\frac{L}{a}\right) + \dots\right)}{Nm}$$

in cui m è la massa di un mattone

$$= \frac{N\frac{L}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} k\frac{L}{a}}{N} =$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{(N-1)\cancel{N}}{2}\,\frac{L}{a}\,\frac{1}{\cancel{N}} =$$

$$= \frac{L}{2}\left(1 + \frac{N-1}{a}\right) < L$$

non deve uscire dalla base

da cui:

$$1 + \frac{N-1}{a} < 2 \quad \rightarrow \frac{N}{a} < 1 + \frac{1}{a} \Longrightarrow \quad N < a + 1$$

Dunque, N dev'esser al più l'intero precedente ad $a+1$, ossia

$$\boxed{N = a}$$

è il numero massimo di mattoni impilabili.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}' \times \vec{L} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eq. card.}}}{\vec{M}}$$

(Si noti che il momento della forza, $\vec{M}$, definisce la velocità angolare di precessione, $\vec{\omega}'$, MA NON L'ACCELERAZIONE ANGOLARE! Pertanto, una eliminazione istantanea del momento $\vec{M}$ comporta un'istantanea scomparsa della precessione. Si dice che la precessione NON POSSIEDE INERZIA)

Vediamo dunque di risolvere il problema. Dalla eq. $\vec{\omega}' \times \vec{L} = \vec{M}$, poiché $\vec{M} = \vec{OC} \times m\vec{g}$ si ha ($|\vec{OC}| \equiv l$):

$$\omega' = \frac{l m g \cancel{\sin\theta}}{L \cancel{\sin\theta}} = \frac{mgl}{L}$$

Dall'altra eq. cardinale abbiamo:

$$m\omega'^2 l \sin\theta = F$$

da cui:

$$F = m\left(\frac{mgl}{L}\right)^2 l \sin\theta = \frac{m^3 g^2 l^3}{L^2} \sin\theta$$

Se non esistesse l'attrito nel pto di contatto, la trottola continuerebbe a precedere con la <u>stessa</u> vel. ang. ω', ma attorno a un asse verticale passante per il suo centro di massa, C.

La legge di Newton per il moto (lungo l'asse x) della massa m si scrive:

$$m\,a = \underset{\text{richiamo}}{-F_x} = -F_0\,\frac{x}{l}$$

Mettendola nella forma:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

si vede che:

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{F_0}{m\,l}}$$

Nel calcolo si è utilizzata la formula trigonometrica

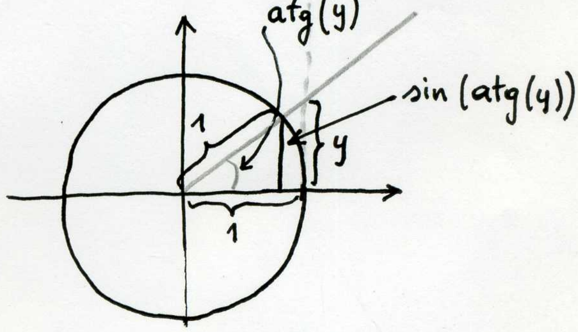
$$\sin(\mathrm{atg}(y)) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

che si dimostra esser vera a partire da considerazioni sulla circonferenza unitaria:

per i triangoli simili:

$$\sin(\mathrm{atg}(y)) : 1 = y : \sqrt{1+y^2}$$

da cui la tesi.



I eq. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ II eq.

$$\frac{1}{2} v_0^2 \left(\underbrace{1-\sin^2\theta_0}_{\cos^2\theta_0}\right) = +g\,l\cos\theta_0 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2gl}{\cos\theta_0}}$$