ELETTRICO!

I problemi di questa scheda sono tratti dagli esercizi riassuntivi di Fisica II per il corso di laurea in Ingegneria Gestionale dell'Università di Padova, proposti dal prof. Roberto Carlin e il dott. Mosè Mariotti.

Problema 1.

Due sfere conduttrici di raggio R_1=1cm e R_2=3cm sono poste con i centri ad una distanza L=2m. Inizialmente entrambe hanno una carica $Q_0=2*10^{-3}$C.

1. Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q_0=-2*10^{-6}$C posta ad una distanza 2L dal centro della seconda sfera (vedi figura).
2. La carica q_o viene portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?

In seguito le due sfere vengono connesse con un filo conduttore.

3. Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano sulle due sfere?
4. Quale è l'energia dissipata nel processo?

Soluzione.

1) La forza esercitata dalle cariche sulla carica q_0 è la somma delle forze esercitate dalle cariche poste a distanza 2L e 3L. Nelle formule abbiamo posto $k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

$$\vec{F}=k\frac{q_0Q_0}{(3L)^2}\hat{x}+k\frac{q_0Q_0}{(2L)^2}\hat{x}=k\frac{13q_0Q_0}{36L^2}\hat{x}=-3.25N\hat{x}$$

2)Il lavoro per portare la carica dal punto P all'infinito è pari alla differenza tra l'energia potenziale della carica posta in P e l'energia potenziale all'infinito.

Se poniamo, come si fa solitamente, il potenziale all'infinito nullo, otteniamo

$$W_{P\to\infty}=U_P-U_\infty=U_P=k\frac{q_0Q_0}{3L}+k\frac{q_0Q_0}{2L}=k\frac{5q_0Q_0}{6L}=15J$$

3)Le cariche presenti sulle sferette si ridistribuiranno in modo da ottenere lo stesso potenziale sulle due sfere: questa è la condizione di equilibrio elettrostatico, affinché non passi più corrente sul filo che collega le due sfere.

Dato che il potenziale di una sfera conduttrice di raggio R sulla cui superficie è presente una carica Q è $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$*, la condizione di equilibrio decide la proporzione tra le due cariche presenti alla fine sulla sfera 1 e 2:* $\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$*. La seconda condizione necessaria per determinare le due cariche è la conservazione della carica totale* $2Q_0$*.*

Perciò $\begin{cases} \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_1} = 3 \\ Q_1 + Q_2 = 2Q_0 \end{cases}$ *da cui otteniamo* $\begin{cases} Q_1 = \frac{Q_0}{2} \\ Q_2 = \frac{3Q_0}{2} \end{cases}$.

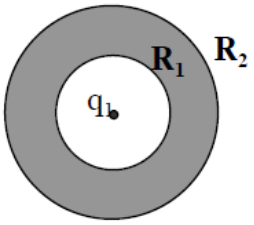
4) L'energia dissipata è la differenza tra l'energia potenziale della situazione finale e quella della situazione iniziale. L'energia potenziale della sfera carica è $U = \frac{Q^2}{2C}$ *(la sfera carica si può considerare come un condensatore con una armatura all'infinito e capacità pari a* $4\pi\varepsilon_0 R$*) e quindi l'energia potenziale iniziale e l'energia potenziale finale assumono rispettivamente i valori:*

$$U_0 = \frac{Q_0^{\,2}}{2C_1} + \frac{Q_0^{\,2}}{2C_2} = \frac{Q_0^{\,2}}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \text{ e } U_F = \frac{Q_1^{\,2}}{2C_1} + \frac{Q_2^{\,2}}{2C_2} = \frac{Q_0^{\,2}}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4R_1} + \frac{9}{4R_2}\right).$$

L'energia dissipata quindi è $E = U_F - U_0 = \frac{Q_0^{\,2}}{32\pi\varepsilon_0}\left(\frac{5R_1 - 3R_2}{R_1 R_2}\right) = -600kJ$.

Problema 3.

Nel centro di un conduttore sferico cavo, di raggio interno $R_1 = 10cm$ e raggio esterno $R_2 = 20cm$, è contenuta una carica puntiforme $q_1 = 3 \cdot 10^{-5} C$.



1. Scrivere le espressioni del campo e del potenziale nelle 3 regioni: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$.

Una quantità di carica $q_2 = 3q_1$ viene portata da distanza infinita e aggiunta al conduttore.

2. Scrivere le nuove configurazioni di campo e potenziale nelle tre regioni.
3. Scrivere il lavoro fatto per portare la carica q_2 dall'infinito al conduttore.

Soluzione.

1) Il campo elettrico ha simmetria sferica, dato che la distribuzione di carica elettrica presenta una simmetria sferica. Sulla superficie interna ed esterna del conduttore neutro per induzione emergono due cariche di segno opposto pari a - q_1 e a q_1 : quindi il campo elettrico dentro nella cavità dipende solo dalla carica interna q_1, mentre il campo all'interno del conduttore (con $R_1 < r < R_2$) è nullo, poiché la carica totale racchiusa da una superficie passante per un punto interno al conduttore è nulla. All'esterno il campo è quello creato dalla carica totale racchiusa ovvero ritorna a dipendere da q_1. Il valore del modulo del campo elettrico perciò è

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; 0 < r < R_1 \vee r > R_2 \\ 0 \quad ; R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

. Anche il potenziale dipende dalla distanza, si può assumere che il potenziale elettrico sia nullo all'infinito e costante all'interno del conduttore, perciò

$$V(r)=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r};\ r>R_2\\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1};\ R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1};0<r<R_1\end{cases}$$

Se avete dei dubbi, ricordate che $V(r)=-\int_{\infty}^{r}E(r)dr$.

2) Se una carica aggiuntiva viene posta sulla sfera, sulla superficie interna la carica presente per induzione è - q_1 *come in precedente, mentre la carica sulla superficie esterna è* $4q_1$*. Perciò si modifica il campo elettrico all'esterno della sfera e il potenziale in tutte tre gli intervalli:*

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2};0<r<R_1\\ 0;R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_1}{\pi\varepsilon_0 r^2};r>R_2\end{cases}\quad e\quad V(r)=\begin{cases}\dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0 r};r>R_2\\ \dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2};R_1<r<R_2\\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}-\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1};0<r<R_1\end{cases}$$

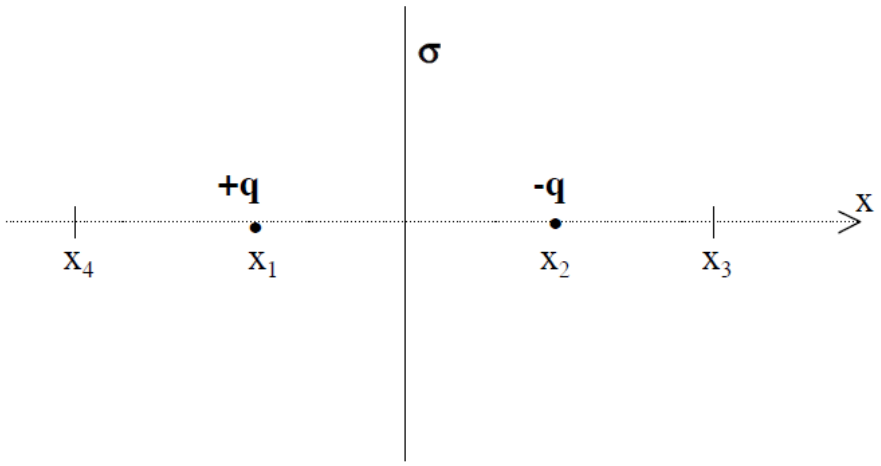
3) Il lavoro per portare la carica dall'infinito alla superficie della sfera è pari alla variazione dell'energia potenziale, e, dato che cambia solo la carica presente sulla superficie esterna, la variazione dell'energia potenziale si calcola solo tenendo conto della carica posta a R_2*:*

$$W=U_F-U_0=\frac{Q_F^{\,2}}{2C}-\frac{Q_0^{\,2}}{2C}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R_2}\left((4q_1)^2-q_1^{\,2}\right)=303{,}3J\ .$$

Problema 4.

Due cariche puntiformi $q_1 = +q$ e $q_2 = -q$ sono poste rispettivamente a $x_1 = -1m$ e $x_2 = 1m$. Sul piano $x = 0$ (piano yz) è presente una densità di carica uniforme σ. Sapendo che $q = 10^{-3}C$ e che $\vec{E}(x_3 = 2m, 0, 0) = 0$ calcolare:

1. La densità di carica σ
2. Il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche per portare una carica $q_0 = 10^{-4}C$ da x_3 alla parte opposta $x_4 = -x_3$



Soluzione.

1) Il campo elettrico nel punto x_3 è la somma del campo elettrico delle due cariche e della distribuzione piana di carica σ. Perciò la condizione

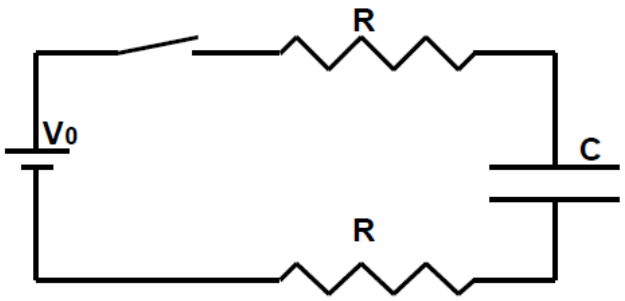
$$\vec{E}(2m,0,0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x_3 - x_2)^2}\hat{x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x_3 + x_2)^2}\hat{x} = 0 \text{ impone che}$$

$$\sigma = \frac{4q}{9\pi} = 141{,}5 \cdot 10^{-6} C/m^2 .$$

2) Il lavoro svolto dalle forze del campo è pari all'opposto della variazione dell'energia potenziale:

$$W = -q(V_F - V_0) = -\frac{qq_0}{3\pi\varepsilon_0} = -1200J .$$

Problema 11.



Nel circuito in figura, con $V_0 = 100V, R = 5M\Omega, C = 10\mu F$, il condensatore è inizialmente scarico e l'interruttore è aperto. Determinare dopo 50 secondi dall'inizio della carica del condensatore (chiusura dell'interruttore):

1. L'energia dissipata su una delle resistenze R.
2. L'energia accumulata sul condensatore C.
3. L'energia fornita dal generatore.

Soluzione.

3) Quando si chiude l'interruttore, la corrente inizia a fluire in senso orario, trasportando carica "positiva" sull'armatura superiore del condensatore e altrettanta carica negativa sull'armatura inferiore. La quantità di carica Q(t) che all'istante t si trova sulle armature del condensatore determina la d.d.p. V(t) tra le armature: il processo termina quando V(t) tra le armature eguaglia V_0. Dato che Q(t)= C V(t) e la costante di tempo del circuito è 2RC =100 s, abbiamo che $Q(t) = CV(t) = CV_0\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right)$. *Quindi la corrente a 50 s è* $Q(50s) = CV(50s) = CV_0\left(1 - e^{-0.5}\right) =$ *393,5mC.*

L'energia fornita dal generatore è pari al lavoro svolto per trasportare la carica Q(t) tra due punti con differenza di potenziale V_0.

$$W = V_0 Q(50s) = CV_0^2\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right) = 39{,}4mJ$$

2) L'energia acculata sul condensatore è $E_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV_0^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right)^2 = 7{,}7mJ$.

Notiamo che il lavoro svolto dal generatore alla fine del processo di carica risulta essere diviso in parti uguali tra l'energia dissipata dalla corrente sulle resistenze e energia necessaria per caricare il condensatore. Durante le fasi intermedie, questa equidivisione dell'energia è falsa: il lavoro svolto dal generatore è molto più alto del doppio dell'energia della carica accumulata nel condensatore, soprattutto perché nella prima fase di carica la corrente è molto alta e la carica accumulata sul condensatore bassa.

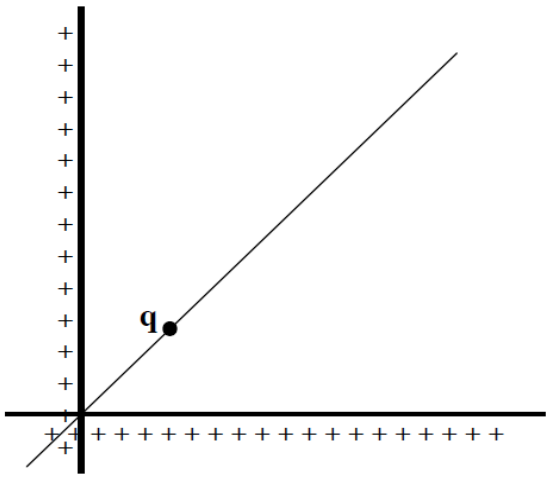
1) Dal bilancio energetico determiniamo l'energia spesa su una delle due resistenze è

$$E_R = (W - E_C)/2 = \left(CV_0^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right) - \frac{CV_0^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}} \right)^2 \right) / 2 = 0{,}5 \cdot (39{,}4 - 7{,}7) mJ = 15{,}9 mJ .$$

Problema 5.

Due fili isolanti molto lunghi, carichi positivamente con densità di carica uniforme $\lambda = 8nC/m$ si incrociano ad angolo retto. Una particella di carica positiva $q = 2\mu C$ e massa $m = 1.2g$ si trova inizialmente ferma nella posizione $P(x_1 = y_1 = 0.1m)$. Calcolare

1. L'intensità del campo elettrico generato dalla coppia di fili nel punto P
2. La forza che la particella subisce nel punto P
3. La velocità della particella dopo che ha percorso la distanza $d = 0.75m$



Soluzione.

1)Il campo elettrico è la somma del campo elettrico prodotto dai due fili che presentano la stessa densità lineare di carica e quindi $E_x = E_y = \frac{\lambda}{2\pi d}$. *Il campo elettrico E è diretto lungo la bisettrice del primo quadrante e il suo modulo è* $E_T = \sqrt{2}\frac{\lambda}{2\pi d} = 2{,}03 V/m$.

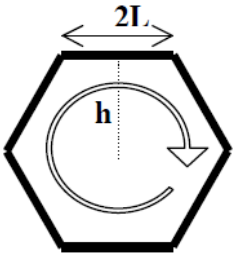
2) La forza sulla particella $F = qE_T = 4{,}07 mN$ *e l'accelerazione della particella è* $a = F/m = 3{,}39 ms^{-2}$.

3) Per ricavare il modulo della velocità finale, ricordiamo che $V_f^2 - V_i^2 = 2ad$ *e quindi* $V_f = \sqrt{2ad} = 2{,}25 m/s$.

Problema 14.

Una spira conduttrice, a forma di esagono regolare di lato 2L=20 cm, è percorsa da una corrente i=12 A. Determinare:

1. la FEM necessaria a mantenere la corrente, sapendo che la spira è composta da un filo di rame di diametro d=1 mm
2. Il campo magnetico B generato al centro della spira.



Soluzione.

1) La resistenza R opposta al passaggio dalla corrente dal filo è $R = \rho_{CU}\frac{l}{(\pi d^2/4)} = 25{,}8 m\Omega$ *e quindi la f.e.m. necessaria per mantenere la corrente è 0,31 A.*

2) Per rispondere alla seconda domanda, basta calcolare il campo magnetico creato dalla corrente i al centro della spira, ovvero a distanza pari a $h = L\sqrt{3}$. *Si potrebbe usare l'espressione del campo* $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{h}$ *ma questa vale nel caso di un filo infinitamente lungo o almeno molto lungo rispetto alla distanza del punto dal filo: decisamente questo non è il caso in questione. Quando la lunghezza del*

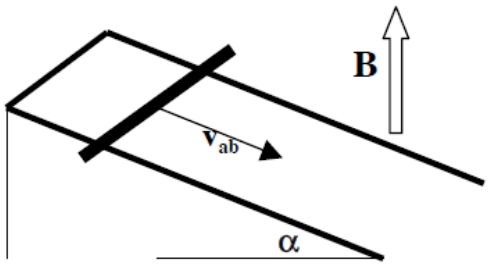
filo L non è molto grande rispetto alla distanza h, il campo magnetico è $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi h}\frac{L}{\sqrt{h^2+L^2}}$ *(si noti che per se la lunghezza del filo L tende ad infinito, ritroviamo la formula precedente).*

Sommando i contributi dei 6 fili otteniamo che il modulo del campo magnetico, entrante nel piano della pagina è $B_T = 6\frac{\mu_0 i}{2\pi h}\frac{L}{\sqrt{h^2+L^2}} = 6\frac{\mu_0 i}{2\pi L\sqrt{3}}\frac{L}{\sqrt{3L^2+L^2}} = \sqrt{3}\frac{\mu_0 i}{2\pi L} = 41{,}6\mu T$.

Problema 21.

In un piano inclinato di angolo $\alpha=30^0$ sono poste due rotaie parallele, distanti l=10cm, di resistenza elettrica trascurabile e connesse elettricamente tra loro alla sommità. Su di esse può scorrere senza attrito una sbarretta conduttrice *ab*, di massa m=10g e resistenza elettrica R=0.1Ω. Il tutto è immerso in un campo magnetico uniforme e costante, diretto verticalmente, di modulo B=0.5T. Ad un certo istante la sbarretta ab viene lasciata libera di scivolare lungo il piano inclinato. Calcolare:

1. La forza elettromotrice indotta nella sbarretta ab, e a corrente indotta nella spira individuata dal sistema rotaie-sbarretta, in funzione della velocità della sbarretta.
2. La velocità limite (se esiste) della sbarretta nel suo moto di scivolamento.



Soluzione.

1) La f.e.m. indotta dalla variazione del flusso concatenato alla spira formata dai due fili e dalla sbarretta che scivola sopra le sbarre è $f.e.m. = -\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = -Blv\cos(30°)$. *La corrente indotta è il rapporto tra la f.e.m e la resistenza R. La sbarretta, percorsa da corrente perpendicolare al piano*

della pagina ed uscente verso di noi, è immersa nel campo magnetico e quindi subisce una forza $\vec{F} = \vec{i} \wedge \vec{B}l$ *, diretta perpendicolarmente a B e a i, perciò orizzontale.*

2) La velocità limite si ottiene dalla condizione che la risultante delle forze parallele alle rotaie sia nulla: $mg\sin(30°) - \frac{B^2 l^2 V \cos(30°)}{R} = 0$ *da cui si ricava che* $V = \frac{mgR\sin(30°)}{B^2 l^2 \cos(30°)} = 2{,}62 m/s$ *.*

Problema 7.

Tre lamine metalliche quadrate parallele, di lato L=120cm, sono poste a distanza h=1.1 cm una dall'altra. Tra le lamine vi sono due sostanze dielettriche, con costanti dielettriche relative k_1=2.1 e k_2=1.7. Le due lamine esterne sono connesse ad un generatore che le mantiene alla tensione V_0=120V. Determinare:

1. Quale è la capacità totale del sistema.
2. Quanto vale il campo elettrico E_1 nel dielettrico 1.
3. Quale è la variazione di energia elettrostatica se i due dielettrici vengono estratti.

Soluzione.

1) I due dielettrici possono essere visti come due condensatori in serie, con capacità

$C_1 = \varepsilon_0 k_1 \frac{A}{h} = 2{,}44 nF$ *e* $C_2 = \varepsilon_0 k_2 \frac{A}{h} = 1{,}97 nF$ *.*

La capacità equivalente ai due condensatori in serie è $C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}09 nF$ *. La carica elettrica è* $Q = C_{eq} V_0 = 131 nC$ *e la d.d.p. sul primo dielettrico è* $V_1 = Q / C_1 = 53{,}6V$ *.*

2) Il campo elettrico nel primo dielettrico è $E_1 = V_1 / h = 4873 V/m$ *.*

3) La variazione di energia elettrostatica è $U_F - U_0 = \frac{C'}{2} V_0^2 - \frac{Q^2}{2C_{eq}} = (4{,}18 - 7{,}87)\mu J = -3{,}69 \mu J$ *.*

La variazione di energia è negativa, quindi le forze elettrostatiche favoriranno l'uscita dei dielettrici dalle armature.