ELETTROMAGNETISMO?

Iniziamo con un problema apparentemente distante dall'elettromagnetismo, ma l'analogia tra campo gravitazionale e campo elettrostatico è lo strumento essenziale per la soluzione di questo problema.

AIF – Olimpiadi di Fisica 2010 Gara Nazionale: PROVA TEORICA – Senigallia – 9 Aprile 2010

PROBLEMA n. 1 – Viaggio in galleria 90 Punti

Per favorire la velocità degli spostamenti, un progettista molto fantasioso pensa di scavare una lunga galleria, perfettamente rettilinea che congiunge due località situate su meridiani opposti, alla stessa latitudine $\varphi = 60°$; le pareti della galleria saranno prive di attrito e nella cavità sarà fatto il vuoto, cosicché – per la conservazione dell'energia – una capsula lasciata "cadere" da ferma ad un'estremità, raggiungerà l'altra estremità della galleria senza utilizzare alcun motore.

Inizialmente si schematizzi la Terra come una sfera omogenea; sfruttando l'analogia formale con il campo elettrostatico di una distribuzione uniforme di carica negativa, è facile determinare l'andamento del campo e quindi l'energia potenziale (gravitazionale) in tutti i punti interni alla Terra.

1. Determinare l'espressione del campo gravitazionale nei punti interni della Terra, sapendo che sulla superficie il modulo del campo vale g_0 (accelerazione di gravità standard).

2. Quanto tempo dura il viaggio secondo il progettista che ha trascurato il fatto che la Terra ruota su se stessa?

3. Qual è la massima velocità raggiunta dalla capsula?

4. Di quanto varia la durata del viaggio, tenuto conto della rotazione terrestre?

Poiché l'attrito non è mai totalmente eliminabile si stima che in un viaggio si perda l'1 % dell'energia potenziale in gioco, ovvero della differenza tra energia potenziale massima e minima lungo il percorso.

5. A che distanza dalla stazione di arrivo si fermerà la capsula?

6. Se non intervenisse un adeguato motore per riportare la capsula al punto di partenza, dopo quanti viaggi l'ampiezza dell'oscillazione sarebbe ridotta a metà?

7. Se si tiene conto del fatto che la distribuzione di massa della Terra non è omogenea, e si pensa ad un modello ancora semplificato in cui il nucleo centrale sferico ha una densità unforme maggiore di quella del mantello esterno, la durata del viaggio sarà maggiore, minore o uguale a quella calcolata sopra e il tipo di moto sarà lo stesso di prima o no? (È richiesta una risposta qualitativa).

Suggerimento per la domanda 6: Se la variazione in un singolo viaggio è piccola, si può assumere – come ipotesi di lavoro – che la perdita di energia meccanica nel tempo sia continua ed uniforme, cioè che la potenza istantanea delle forze dissipative sia pari a quella media in un viaggio.

Alcune risposte: 1) $\vec{g}(r) = -\frac{g_0}{R}\vec{r}$ 2) $T = \pi\sqrt{R/g_0} = 2.53 \times 10^3\,\mathrm{s} \approx 42\,\mathrm{min}$ 3) $\sqrt{g_0 R}\cos\varphi$

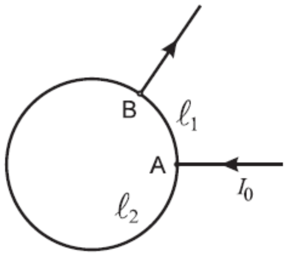
4) $\delta T = \frac{R\,\Omega^2}{2g_0}T \approx 4\,\mathrm{s}$ 5) $\frac{1}{2}\eta R\cos\varphi \approx 15.9\,\mathrm{km}$ 6) $\frac{\ln 4}{\eta} \approx 139$ viaggi 7) il viaggio durerà meno e il moto non sarà più armonico.

Questo invece è proprio un problema di elettromagnetismo: correnti, resistenze in parallelo, potenza elettrica e campo magnetico della spira e del filo.

PROBLEMA n. 4 – Correnti in un anello

70 Punti

Un filo di costantana lungo $L = 100\,\mathrm{cm}$ è piegato in modo da formare un anello circolare. Un filo conduttore rettilineo viene fissato nel punto A dell'anello (v. figura) e un secondo filo uguale al primo è collegato all'anello tramite un contatto scorrevole (punto B), in modo che la sua direzione si mantenga sempre radiale; tutti i fili giacciono nello stesso piano.



Siano ℓ_1 ed ℓ_2 le lunghezze dei due archi compresi tra i punti A e B e sia $x = \ell_1/L$ un parametro adimensionale che definisce la posizione del punto B.

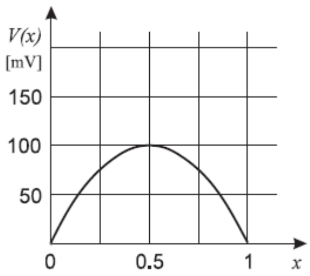
I due fili rettilinei vengono collegati (a grande distanza) ad un generatore di corrente $I_0 = 250\,\mathrm{mA}$ e si misura la d.d.p. tra i punti A e B; si trova che il massimo di tale d.d.p. al variare di x è $V_0 = 100\,\mathrm{mV}$.

1. Determinare lo spessore (diametro della sezione) del filo di costantana.
2. Tracciare il grafico della d.d.p. V misurata tra A e B in funzione di x.
3. Tracciare il grafico della potenza dissipata per effetto Joule nell'arco di lunghezza ℓ_1, in funzione di x, e determinarne il valore massimo, individuando la posizione del punto B.
4. Tracciare il grafico del modulo del campo magnetico $\vec{B}$ al centro dell'anello, in funzione di x.

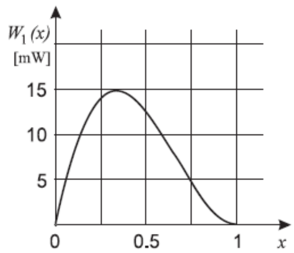
Il secondo filo rettilineo applicato al contatto mobile B viene ora disposto perpendicolarmente al piano dell'anello e del primo filo.

5. Rispondere alle domande precedenti nella nuova situazione.

Alcune risposte: 1) $0.624\,\mathrm{mm}$ 2)



3)



$14.8\,\mathrm{mW}$

4) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_\gamma \frac{\vec{d\ell} \times \hat{r}}{r^2}$ quindi $B_{tot} = 0$. 5) $0.157\,\mu\mathrm{T}$

P 3 Ancora il campo elettrostatico radiale di modulo uniforme! Punti 85

Si considerino di nuovo (*) due superfici sferiche concentriche di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$ che delimitano un volume $\mathcal{V}$; un'opportuna distribuzione di cariche, in posizione determinata, è tale da generare un campo elettrico radiale uscente, il cui modulo (E_0 noto) è uguale in tutti punti del volume $\mathcal{V}$; il campo elettrico è nullo nei punti interni alla prima superficie (quella di raggio minore) e nei punti esterni alla seconda superficie. Per ottenere questo è necessario porre una distribuzione di carica positiva sulla superficie interna, una negativa sulla superficie esterna ed un'ulteriore distribuzione volumetrica nello spazio tra le due superfici, in modo tale che la carica totale sia nulla.

1. Quanto valgono le densità di carica superficiale (uniformi) sulle due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2?

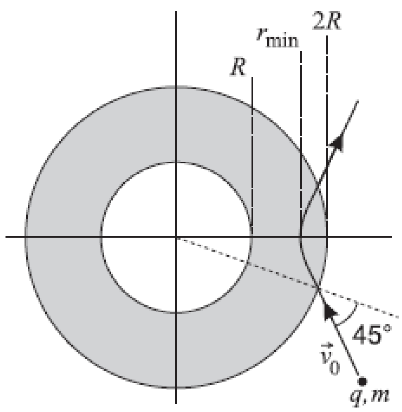
2. Quanto vale la densità media di carica spaziale tra le due superfici sferiche di raggio R_1 ed R_2?

Si può facilmente verificare – per esempio considerando due corone sferiche di uguale volume – che la densità di carica spaziale non può essere uniforme; essa sarà quindi funzione della distanza dal centro: $\rho = \rho(r)$.

3. Determinare l'andamento della densità volumetrica di carica $\rho(r)$ al variare della distanza dal centro (†)

4. Tracciare i grafici del campo elettrico $E(r)$, della densità di carica (volumetrica) $\rho(r)$ e del potenziale e.s. $V(r)$, con $V_\infty = 0$, per ogni r compreso nell'intervallo $[0, R']$ con $R' > 2R$.

Una particella di massa m e carica $q > 0$, lanciata radialmente dall'esterno verso il centro della distribuzione sferica, riesce ad attraversare la sfera se la sua velocità iniziale ha un valore qualunque maggiore di v_0 (e la conservazione dell'energia mostra che $v_0^2 = 2q\,E_0\,R/m$). Si consideri l'esperimento descritto in figura: la stessa particella viene lanciata, da fuori, con velocità di modulo v_0 in modo che nel punto di ingresso la direzione sia ruotata di 45° rispetto a quella radiale; la particella raggiunge una distanza minima dal centro delle distribuzione ($r_{\min}$) per poi uscire di nuovo all'esterno.



5. Spiegare perché la traiettoria della particella è certamente una curva piana.

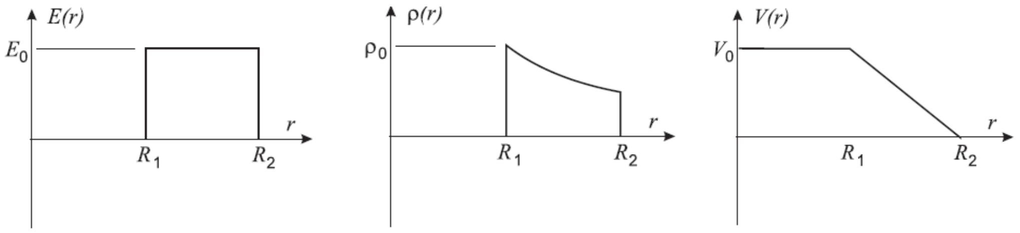
6. Scrivere l'equazione che dà il valore di $r_{\min}$ e risolverla in termini della variabile $z = r/R$ con un'opportuna tecnica numerica e con l'approssimazione dell'1 %.

(*) *cfr Olimpiadi di Fisica 2011 – Gara di 2º Livello, 11 febbraio 2011*

(†) *NOTA: la soluzione deve essere trovata senza ricorrere all'uso dell'operatore differenziale "Divergenza". Suggerimento: Se la densità spaziale di carica dipende solo da r, questa si potrà considerare uniforme in una corona sferica di raggio r di spessore infinitesimo dr …*

Risposte: 1) $\sigma(R) = \varepsilon_0\,E_0$, $\sigma(2R) = -\varepsilon_0\,E_0$ 2) $\dfrac{9\,\varepsilon_0\,E_0}{7R}$ 3) $\rho(r) = \dfrac{2\varepsilon_0\,E_0}{r}$

4)



6) $z^3 - z^2 - 2 = 0$ con $1 < z < 2$: z = 1.6956..

AIF – Olimpiadi di Fisica 2013 Gara Nazionale – Prova Teorica – 12 Aprile 2013

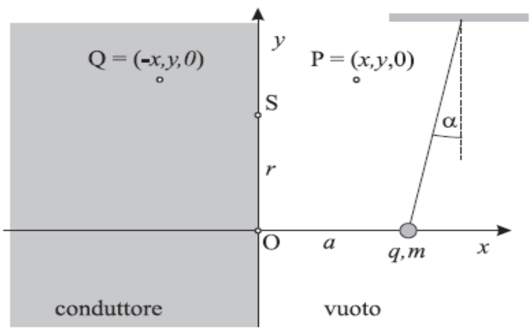
P2 L'attrazione dell'induzione elettrostatica

Punti 100

Una sferetta di massa m possiede una carica q ed è appesa ad un lungo filo. Se si dispone la sferetta vicino ad una lastra conduttrice scarica, si osserva che la sferetta viene attratta dalla lastra; questo accade perché, per induzione, sulla superficie della lastra si forma una distribuzione di cariche di segno opposto a q. Si supponga che, all'equilibrio, la sferetta si trovi ad una distanza a dalla lastra e che il filo formi un angolo α con la verticale.

Rispetto alla distanza a tra carica e lastra le dimensioni della sferetta sono molto piccole cosicché la carica q può essere sempre considerata **puntiforme**; inoltre le dimensioni della lastra, molto maggiori di a, possono essere considerate **infinite**. Si può quindi considerare un piano (di equazione $x = 0$) come superficie di separazione tra un mezzo conduttore nel semispazio $x < 0$ e il vuoto nel semispazio $x > 0$, entro cui si trova la sferetta. Nella figura è indicato anche il sistema di coordinate consigliato, in modo che la sferetta si trovi sull'asse x, quindi nel punto di coordinate $(a, 0, 0)$, che l'asse y sia verticale e orientato verso l'alto e l'asse z perpendicolare al piano della figura ed uscente.

Relativamente alla distribuzione delle cariche indotte, sarà sufficiente studiare la situazione lungo l'asse $y > 0$. Infatti, per simmetria, la densità di carica, σ, dipenderà solo dalla distanza r del punto considerato dall'origine ($r^2 = y^2 + z^2$).



1. Per determinare il campo elettrostatico in un generico punto P $= (x, y, 0)$ nel semispazio vuoto $x > 0$ si consideri inizialmente il punto Q $= (-x, y, 0)$ all'interno del materiale conduttore e simmetrico di P rispetto al piano di separazione tra i due mezzi. Si scrivano il vettore campo e.s. $\vec{E}(\mathrm{Q})$ prodotto da tutte le cariche presenti e il vettore $\vec{E}_1(\mathrm{Q})$ **prodotto dalle sole cariche indotte** che si formano sulla superficie della lastra (piano $x = 0$).
   Qui – e nel seguito – si esprimano i vettori usando la notazione coi versori o per componenti.

2. Si scriva adesso il campo e.s. $\vec{E}_1$ (prodotto dalle sole cariche indotte presenti sulla superficie della lastra) nel punto P nel semispazio $x > 0$, mostrando che, limitatamente a questo semispazio, il campo $\vec{E}_1$ è identico a quello generato da una singola carica puntiforme q' di cui si chiede il valore e la posizione.

3. A titolo d'esempio, si scriva il campo e.s. (totale) $\vec{E}$, nel punto A $= (a, a, 0)$.

4. Si scriva il campo e.s. (totale) $\vec{E}$, in prossimità del punto S $= (0, r, 0)$ nel semispazio vuoto, cioè in un punto vicinissimo alla superficie della lastra, a distanza r dall'origine O; in altri termini, il limite dell'espressione del campo per $x \to 0^+$, $y = r$, $z = 0$.

5. Si calcoli la densità di carica indotta $\sigma(r)$ nel punto S e si dica quanto vale nel punto della superficie della lastra dove il suo modulo è massimo.

6. Si calcoli il valore della carica q in funzione di m, a ed α.

7. Si calcoli la quantità totale di carica indotta sul piano conduttore.

PROBLEMA n. 2 – L'attrazione dell'induzione elettrostatica

Quesito n. 1.

In condizioni di equilibrio il campo e.s. dentro il materiale conduttore è nullo: $\vec{E}(Q) = 0$.

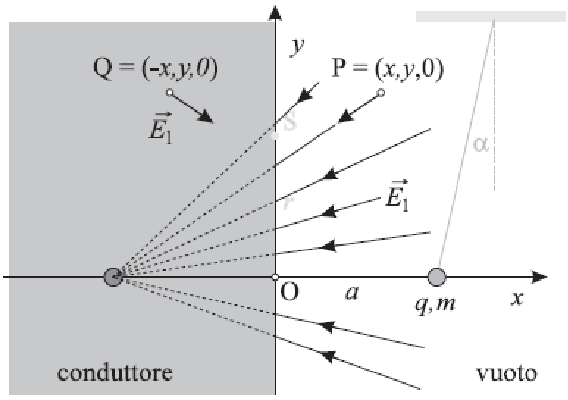
Poiché questo è la somma del campo $\vec{E}_1(Q)$ prodotto dalla distribuzione di cariche indotte σ e del campo $\vec{E}_2(Q)$ prodotto dalla carica q, risulta

$$\vec{E}_1(Q) = -\vec{E}_2(Q) = -\frac{k\,q\,\vec{r}_0}{r_0^3}$$

dove $\vec{r}_0$ è il vettore posizione del punto Q rispetto alla carica q e $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$\vec{r}_0 = -(a+x)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} \quad \text{da cui}$$

$$\vec{E}_1(Q) = k\,q\,\frac{(x+a)\,\hat{\imath} - y\,\hat{\jmath}}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}}$$



NOTA: Nelle due figure della soluzione è rappresentato il caso $q > 0$; nel caso opposto tutti i versi devono essere invertiti.

Quesito n. 2.

La distribuzione $\sigma(r)$, essendo nel piano $x = 0$, è simmetrica per riflessione rispetto al medesimo piano; ne segue che anche il campo prodotto da questa deve godere della stessa simmetria, per cui nel punto P, simmetrico di Q, la componente x del campo si inverte e quella y è uguale:

$$\vec{E}_1(P) = -k\,q\,\frac{(x+a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

Sempre per simmetria si può dire che il vettore campo e.s. in P è allineato con il punto $(-a, 0, 0)$ simmetrico di $(a, 0, 0)$; poiché P è un punto generico, tutte le linee di campo nel semispazio $x > 0$ appartengono a rette passanti per $(-a, 0, 0)$, come mostrato in figura.

Per intensità, direzione e verso, il campo $\vec{E}_1$ prodotto dalla distribuzione σ nel semispazio $x > 0$ è identico a quello di una singola carica q', puntiforme, di valore $-q$ e posta nel punto $(-a, 0, 0)$.

Quesito n. 3.

Il campo (totale) $\vec{E}$ nel punto generico P è ancora la somma vettoriale del campo $\vec{E}_2$ della carica q e di quello $\vec{E}_1$ della sola carica indotta σ che può essere sostituito da quello di una carica puntiforme $q' = -q$, come detto sopra:

$$\vec{E}(P) = k\,q\,\frac{(x-a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{3/2}} - k\,q\,\frac{(x+a)\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}}{\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

In particolare in A $= (a, a, 0)$ si ottiene

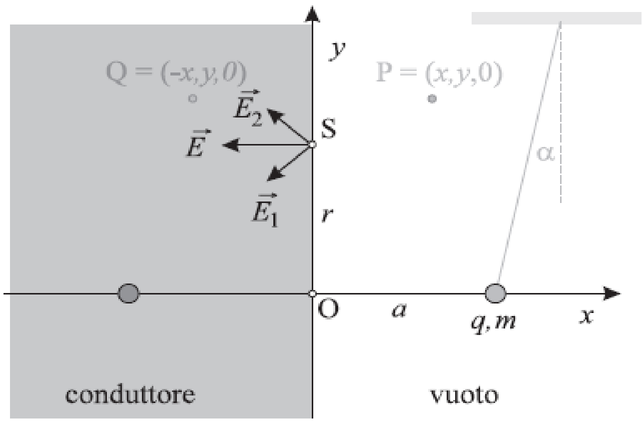
$$\vec{E}(P) = k\,q\,\frac{\hat{\jmath}}{a^2} - k\,q\,\frac{2\,\hat{\imath} + \hat{\jmath}}{5\sqrt{5}\,a^2} = k\,q\,\frac{-2\,\hat{\imath} + (5\sqrt{5} - 1)\,\hat{\jmath}}{5\sqrt{5}\,a^2}$$

Quesito n. 4.

Dall'espressione generale, in prossimità del punto S $(x \to 0^+, y = r, z = 0)$ si ha

$$\vec{E}(S) = k\,q\,\frac{(-a)\,\hat{\imath} + r\,\hat{\jmath}}{\left[(-a)^2 + r^2\right]^{3/2}} - k\,q\,\frac{a\,\hat{\imath} + r\,\hat{\jmath}}{\left[a^2 + r^2\right]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{2k\,q\,a\,\hat{\imath}}{\left[a^2 + r^2\right]^{3/2}}$$



Quesito n. 5.

In prossimità di un piano conduttore all'equilibrio si ha che il campo e.s. ha solo la componente perpendicolare al piano; per il teorema di Coulomb (conseguenza del teorema di Gauss) tale componente, orientata positivamente verso l'esterno del conduttore, è $E = \sigma/\varepsilon_0$, per cui

$$\sigma(r) = \varepsilon_0\,E(r) = \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2 + r^2)^{3/2}} \qquad \text{essendo} \qquad \varepsilon_0\,k = \frac{1}{4\pi}$$

Il massimo del modulo della densità di carica si ha, com'è intuitivo, per $r = 0$, dove σ vale

$$\sigma_0 = \varepsilon_0\,E(0) = \frac{-q}{2\pi\,a^2}$$

Nel caso $q > 0$ risulta quindi $\sigma < 0$ e il campo e.s. punta verso il conduttore; al contrario per $q < 0$.

Quesito n. 6.

Poiché il campo delle cariche indotte è uguale a quello di una singola carica $-q$, la forza di attrazione tra la carica q e la carica indotta è uguale a quella dovuta alla carica $-q$ a distanza $2a$ dalla sferetta

$$\vec{F} = -\frac{k\,q^2}{4a^2}\,\hat{\imath}$$

Sulla sferetta, oltre a questa forza agiscono il peso $\vec{P}$ e la tensione del filo $\vec{T}$. All'equilibrio deve essere

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

che, espressa in termini di componenti x ed y, dà le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{k\,q^2}{4a^2} = T\ \text{sen}\,\alpha \\ mg = T\ \cos\alpha \end{cases}$$

Dividendo membro a membro e risolvendo rispetto all'incognita q si ha

$$q = \pm 2a\sqrt{\frac{mg\,\tan\alpha}{k}}$$

Quesito n. 7.

A) Per integrazione diretta.

La distribuzione di carica indotta presenta (ovviamente) una simmetria per rotazione attorno all'asse x. È quindi conveniente utilizzare sul piano separatore (y, z) le coordinate polari; in particolare la densità di carica dipende solo dalla distanza r tra l'origine O e il punto considerato:

$$\sigma(r) = \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2+r^2)^{3/2}} \quad \text{come già trovato al punto 5.}$$

Per avere la quantità totale di carica indotta occorre integrare questa distribuzione su tutto il piano; in virtù della simmetria conviene scegliere come elemento infinitesimo di superficie una corona circolare di raggio r e spessore dr cosicché l'area risulta $ds = 2\pi r\,dr$ (Nota: al primo ordine in dr si può trovare anche come differenza tra l'area del cerchio di raggio $r + dr$ e quello di raggio r).

L'integrale da calcolare è elementare operando la sostituzione $u = a^2 + r^2 \quad\Rightarrow\quad du = 2r\,dr$, come segue

$$Q_{\text{ind}} = \int_S \sigma\,ds = \int_0^\infty \frac{-q\,a}{2\pi\,(a^2+r^2)^{3/2}}\,(2\pi\,r)\,dr = -q\,a\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\,q\,a\int_{a^2}^\infty u^{-3/2}\,du =$$
$$= q\,a\,\left|u^{-1/2}\right|_{a^2}^{\infty} = -q$$

B) Utilizzando il teorema di Gauss.

Si deve considerare una superficie chiusa costituita da un cerchio di raggio R su di un piano parallelo al piano $x = 0$ e con centro in qualunque punto $x < 0$ (tipicamente si prenderà appena dentro il materiale conduttore), e una superficie emisferica dalla parte dell'asse x positivo.

Per il teorema di Gauss il flusso del campo elettrico attraverso questa superficie è proporzionale alla quantità di carica che essa contiene.

Se adesso si considera la superficie limite ottenuta facendo tendere $R \to \infty$ la quantità di carica contenuta al suo interno sarà

$$Q_{\text{tot}} = q + Q_{\text{ind}}$$

mentre il flusso del campo elettrico tende a zero in quanto il campo nello spazio $x > 0$ a grande distanza è quello di un dipolo che decresce come $1/R^3$ mentre la superficie cresce come R^2.

Ne segue che

$$Q_{\text{tot}} = 0 \quad\Rightarrow\quad Q_{\text{ind}} = -q\,.$$