

IL DECADIMENTO RADIOATTIVO

LEGGE DI SODDY

Il numero di decadimenti in un piccolo intervallo δt tempo δt vale (in media) *probab. decadimento per un δt di tempo*

$$\delta N_{\text{dec.}} = \lambda N(t) \delta t$$

dove $N(t)$ è il numero di radionuclidi presenti.

Se il decadimento è l'unica causa di variazione di radionuclidi, nel limite di grandi numeri (fluttuazioni statistiche trascurabili) vale la LEGGE DI SODDY:

$$\delta N = -\delta N_{\text{dec.}} = -\lambda N(t) \delta t$$

ossia:

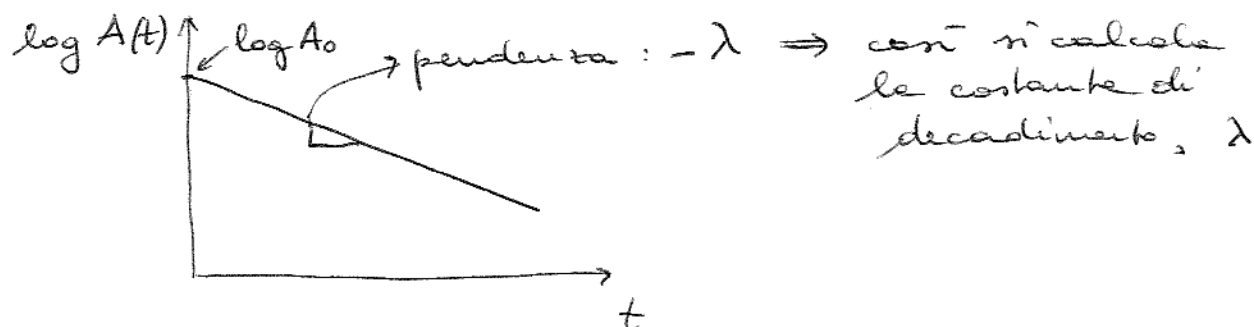
$$\triangleright N(t) = N(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}$$

(Nel seguito porremo $t_0 = 0$)

$\triangleright$ L'attività è definita come:

$$A(t) \equiv \frac{\delta N(\text{dec.})}{\delta t} = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

(con $A_0 = A(t_0 = 0)$).



$\triangleright$ Il TEMPO DI DIMEZZAMENTO è definito come il tempo di tempo necessario per il decadimento di metà dei nuclei di partenza:

$$T_{1/2} \text{ è tale che } N(t = T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0$$

dove N_0 è il numero di nuclei di partenza (a $t=0$).

Applicando il logaritmo si trova:

$$-\lambda T_{1/2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

NOTA: UNITÀ DI MISURA delle grandezze in gioco =

• ATTIVITÀ, $A(t)$ si misura in:

→ Becquerel (Bq): $1 \text{ Bq} = \frac{1 \text{ decadimento}}{1 \text{ secondo}}$

→ Curie (Ci)
(NON È S.I.)

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

(attività di 1 grammo di ^{226}Ra)

Capita sovente che un certo nucleo iniziale possa decadere in due (o più) modi diversi, portando a due nuclei finali diversi.

Supponiamo per esempio che i modi di decadimento siano 2, che chiamiamo a e b.

Il tasso di decadimento nel modo a(b), $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{a(b)}$, è determinato dalla COSTANTE DI DECADIMENTO PARZIALE

$\lambda_{a(b)}$:

$$\lambda_a = \frac{-\left(\frac{dN}{dt}\right)_a}{N}$$

e

$$\lambda_b = \frac{-\left(\frac{dN}{dt}\right)_b}{N}$$

dove $N = N(t)$ è il numero di nuclei della specie originaria che devono quindi decadere.

Il tasso totale di decadimento è

$$-\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{tot}} = -\left(\frac{dN}{dt}\right)_a - \left(\frac{dN}{dt}\right)_b = N(\lambda_a + \lambda_b) \equiv N\lambda_{\text{tot}}$$

con $\lambda_{\text{tot}} \equiv \lambda_a + \lambda_b$ è la COSTANTE DI DECADIMENTO TOTALE.

I nuclei possono pertanto decadere con la legge:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda_{\text{tot}} \cdot t}$$

e la attività

$$A(t) = \left| \frac{dN}{dt} \right|$$

decade con costante di decadimento λ_{tot} .

Se contiamo il numero di decadimenti, osserviamo solo la costante di decadimento totale λ_{tot} .

Non osserviamo MAI un decadimento esponenziale dell'attività con costanti λ_a o λ_b . Le costanti parziali, λ_a e λ_b , determinano solo la probabilità che un decadimento avvenga secondo il modo a oppure b.

Pertanto, una frazione $\frac{\lambda_a}{\lambda_{\text{tot}}}$ dei nuclei decade nel modo a, e una frazione $\frac{\lambda_b}{\lambda_{\text{tot}}}$ nel modo b:

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_{\text{tot}} \cdot t}$$

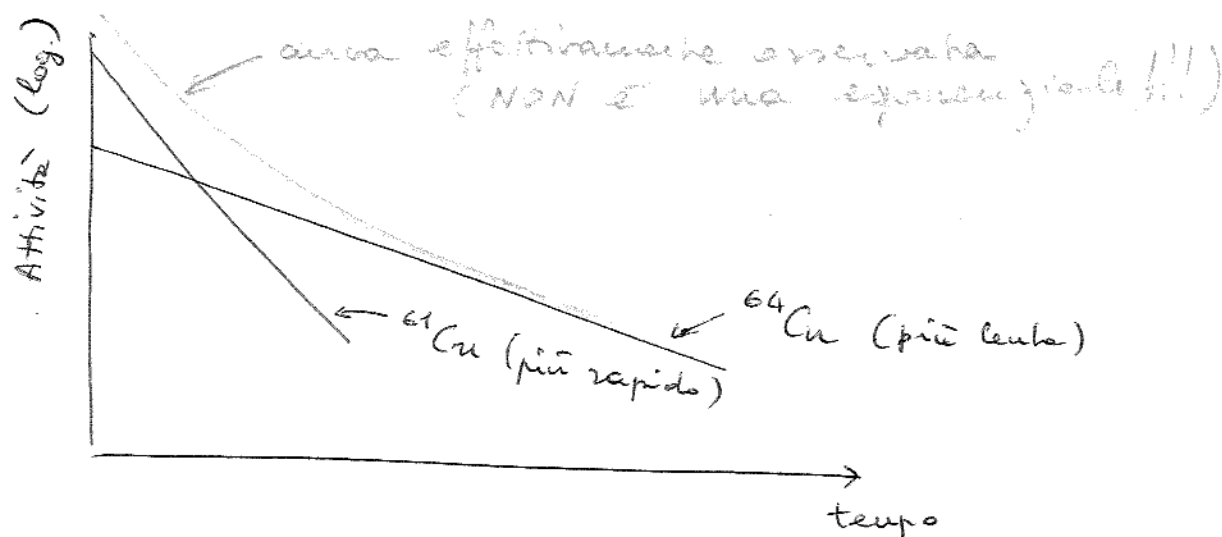
$$N_{2,a} = \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_{\text{tot}}} \right) N_0 \left(1 - e^{-\lambda_{\text{tot}} \cdot t} \right)$$

$$N_{2,b} = \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_{\text{tot}}} \right) N_0 \left(1 - e^{-\lambda_{\text{tot}} \cdot t} \right)$$

I termini separati λ_a e λ_b NON compaiono mai in alcun termine esponenziale: non possiamo infatti "seguire" una modalità di decadimento per osservare il decadimento esponenziale dell'altra.

Un altro caso particolare è quello in cui si ha un campione contenente DUE tipologie di RADIONUCLIDI, ~~da~~ con schemi di decadimento intrinsecamente correlati (ES: miscela di ^{64}Cu ($T_{1/2} = 12,7\text{h}$) e di ^{61}Cu ($T_{1/2} = 3,4\text{h}$)). Tali componenti della miscela NON sono separabili chimicamente.

Osserviamo il grafico della ATTIVITÀ della miscela in funzione del tempo (in scala lin-log):



EQUILIBRIO SECOLARE

Supponiamo che l'ipotesi finora fatta nella derivazione delle leggi esponenziali, ossia quella per cui non sono introdotti "nuovi" nuclei - del tipo che sta decadendo - nel campione, non sia valida. In tal caso il dec. NON è più ESPONENZ.

Chiamo R il tasso di crescita (suppongo costante nel tempo) con cui vengono aggiunti nuclei del tipo d'interesse nel sistema. Pertanto:

- N_1 cresce per l'aggiunta di nuclei con tasso R
- N_1 decresce per decadimento (in una certa specie 2) con costante di dec. λ_1 :

$$dN_1 = R dt - \lambda_1 N_1(t) dt$$

Ossia:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = R - \lambda_1 N_1(t)$$

che risolveremo per separazione di variabili:

$$\frac{1}{\lambda_1} \int \frac{dN_1}{\left[\frac{R}{\lambda_1} - N_1\right]} = t - t_0 \Rightarrow -\frac{1}{\lambda_1} \int \frac{d\tilde{N}_1}{\tilde{N}_1} = t - t_0$$

dove ho posto: $\tilde{N}_1 := \frac{R}{\lambda_1} - N_1 \Rightarrow d\tilde{N}_1 = -dN_1$

Posto $t_0 = 0$ per semplicità, allora:

$$\ln \left(\frac{\tilde{N}_1(t)}{\tilde{N}_1(0)} \right) = -\lambda_1 t \Rightarrow \tilde{N}_1(t) = \tilde{N}_1(0) e^{-\lambda_1 t}$$

Sostituendo, ricordando che $\tilde{N}_1(0) = \frac{R}{\lambda_1} - N_1(0)$,
e assumendo che all'istante iniziale $N_1(0) = 0$, si ha:

$$N_1(t) = \frac{R}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

e per l'attività:

$$A_1(t) \equiv \lambda_1 N_1(t) = R (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

Se il tempo di irradiazione è $t \ll \lambda_1^{-1}$ (ovvero se aggiungo nuclei per poco tempo) allora posso sviluppare in serie di McLaurin l'esponenziale:

$$A_1(t) \approx R (1 - 1 + \lambda_1 t) = R \lambda_1 t$$

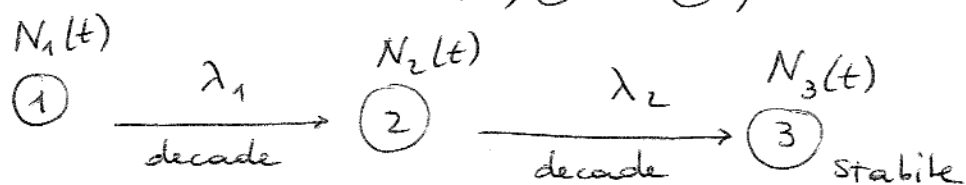
Quindi, per tempi piccoli, l'attività cresce a TASSO costante. Ciò corrisponde ad una accumulazione LINEARE nel tempo dei nuclei, ~~perché~~ il cui numero non è ancora diminuito in modo significativo col processo di decadimento. Invece, nel limite $t \rightarrow +\infty \Rightarrow e^{-\lambda_1 t} \rightarrow 0$. Pertanto:

$$A_1(t) \approx R$$

(condizione detta di EQUILIBRIO SECOLARE)

CRESCITA DI ATTIVITÀ FIGLIE

Consideriamo 3 nuclidi ①, ② e ③, tali che:



Per semplicità consideriamo le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} N_1(0) = N_0 \\ N_2(0) = 0 \\ N_3(0) = 0 \end{cases}$$

ovvia: a $t=0$ solo
la specie ①
è presente -

Abbiamo:

$$\triangleright \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \implies \text{legge di Soddy: } N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\triangleright \frac{dN_2}{dt} = +\lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t)$$

Risolviamo pertanto questa eq. differenziale del primo ordine:

$$\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}$$

Si tratta che:

$$\frac{d}{dt} [e^{\lambda_2 t} N_2(t)] = e^{\lambda_2 t} \left[\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2(t) \right]$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} [e^{\lambda_2 t} N_2(t)] = \lambda_1 N_0 e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t}$$

che si risolve ora per integrazione diretta:

$$e^{\lambda_2 t} N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + (\text{cost.})$$

$$\Rightarrow N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 e^{-\lambda_1 t} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{e^{-\lambda_2 t}} (\text{cost.})$$

In base alle condizioni iniziali:

$$N_2(0) = 0 \Rightarrow \text{cost.} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 e^{-\lambda_2 t}$$

(si vede meglio tenendo conto ~~del~~ ~~costo~~ ~~costo~~).

Pertanto:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_0 [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]$$

CASI PARTICOLARI:

a) $\lambda_1 \ll \lambda_2$

In questo caso il "genitore" (1) ha un tempo di dimezzamento $\gg$ di quello di (2) e decade sostanzialmente a tasso costante, come segue dallo sviluppo di Taylor:

$$e^{-\lambda_1 t} \approx 1$$

$$\hookrightarrow N_2(t) \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t})$$

b) $\lambda_1 \gg \lambda_2$:

In questo caso $e^{-\lambda_1 t} \approx 0$

$$\hookrightarrow N_2(t) \approx N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (-e^{-\lambda_2 t})$$

(Dalla a) si vede una nuova condizione di equilibrio regolare, ossia, quando t diviene grande,

$$N_2(t) \stackrel{t \gg 0}{\approx} N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - 0)$$

$$\lambda_2 N_2(t) \approx N_0 \lambda_1 = \text{costante}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$

RADIO DATAZIONE

Analizziamo di seguito 3 metodi di radiodatazione paradigmatici
metodo "zero")

Chiamiamo ① il nucleide genitore e ② il nucleide figlio.

Al tempo t avremo:

$$\underbrace{N_2(t) + N_1(t)}_{\text{noti}} = \underbrace{N_1(t_0)}_{\text{incognito}}$$

Tempo da cui
si vuole iniziare
a contare

Pertanto:

$$N_2(t) = N_1(t_0) [1 - e^{-\lambda(t-t_0)}]$$

Dove si è sfruttato:

$$N_1(t) = N_1(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}$$

$$\text{e } N_2(t_0) \stackrel{\text{assumo}}{=} 0.$$

Da tali espressioni si ricava:

$$\frac{N_1(t)}{N_1(t_0)} = \frac{N_1(t)}{N_2(t) + N_1(t)} = \frac{N_1(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)}}{N_1(t_0)}$$

Cioè, per calcolare l'intervallo $\Delta t = t - t_0$, a partire
da $N_2(t)$ e $N_1(t)$ si fa:

$$e^{+\lambda(t-t_0)} = \frac{N_2(t) + N_1(t)}{N_1(t)} = 1 + \frac{N_2(t)}{N_1(t)}$$

da cui:

$$\Delta t \equiv t - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_2(t)}{N_1(t)} \right]$$

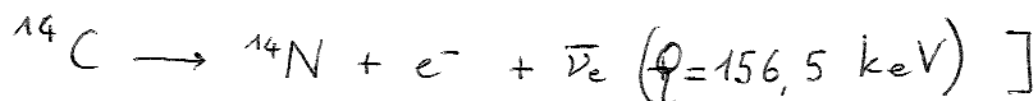
Metodo 1)

Si calcola Δt a partire dall'ABBONDANZA ISOTOPICA, se quest'ultima è nota a t_0 .

Nel caso del ^{14}C , si ha che $A(^{14}\text{C})$ è sostanzialmente costante da millenni. Infatti il ^{14}C si forma negli strati alti della atmosfera in modo continuo, come risultato del bombardamento dell'azoto-14, ^{14}N , da parte dei raggi cosmici (azione costante da millenni). Gli organismi viventi consumano quindi, mentre sono ANCORA IN VITA, la stessa ABBONDANZA ISOTOPICA di ^{14}C , ora come migliaia di anni fa. In particolare, la frazione di ^{14}C su ^{12}C è $\approx 10^{-12}$.

Quello che ci interessa è la attività specifica per grammo di carbonio. Sapendo che l'emivita $T_{1/2}(^{14}\text{C}) \equiv \frac{\ln 2}{\lambda(^{14}\text{C})} = 5730$ anni, si ha che ogni grammo di carbonio mostra un'attività di circa 15 decadimenti al minuto (COSTANTE)

[NOTA: il ^{14}C decade β^- in ^{14}N :



Quando però un organismo muore, smette di acquisire ^{14}C e pertanto l'attività specifica decade esponenzialmente.

$$A_s(t) = \frac{\lambda N_{(^{14}\text{C})}(t)}{M} = \frac{\lambda N_0(^{14}\text{C}) e^{-\lambda(t-t_0)}}{M}$$

Moltiplicando e dividendo per $N_0(\text{C})$:

$$A_s(t) = \lambda \left[\frac{N_0(^{14}\text{C})}{N_0(\text{C})} \right] \cdot \frac{N_0(\text{C})}{M} e^{-\lambda(t-t_0)}$$

istante in cui l'organismo muore

Con tecniche di spettroscopia di massa con Acceleratori della AMS, è possibile ricavare l'abbondanza isotopica di ^{14}C e quindi $\Delta t = t - t_0$.

metodo 2)

"Metodo del Rb/Sr"

Si sfruttano 3 nuclidi: (in un minerale)

① $\xrightarrow{\text{decade in}}$ ② (stabile)

(esempio $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$)

③ isotopo, sempre STABILE, di ②

Si lavora nel seguente modo; si ha:

$$\underbrace{N_2(t)}_{\text{noto al tempo } t \text{ (oggi)}} + \underbrace{N_1(t)}_{\text{noto}} = \underbrace{N_2(t_0)}_{\text{ulteriore incognita}} + \underbrace{N_1(t_0)}_{\text{incognita}}$$

Se ③ è stabile $\Rightarrow N_3(t) [\text{oggi}] = N_3(t_0) [\text{formazione minerale}]$

Divido m. a membro le due equazioniritte:

$$\frac{N_2(t) + N_1(t)}{N_3(t)} = \frac{N_2(t_0) + N_1(t_0)}{N_3(t_0)}$$

Ovvero:

$$\underbrace{\frac{N_2(t)}{N_3(t)}}_{y} = \underbrace{\frac{N_1(t)}{N_3(t)}}_x \underbrace{\left[e^{+\lambda(t-t_0)} - 1 \right]}_m + \underbrace{\frac{N_2(t_0)}{N_3(t_0)}}_q$$

Possiamo identificare queste con l'equazione d'una retta.

$$y = mx + q$$

con coefficiente angolare dato da:

$$m = \left[e^{\lambda(t-t_0)} - 1 \right]$$

da cui si può calcolare $\Delta t = t - t_0$.

(Il metodo è usato anche per $^{40}\text{Kr}/^{40}\text{Ar}$, $^{235}\text{U}/^{207}\text{Pb}$, $^{238}\text{U}/^{206}\text{Pb}$).