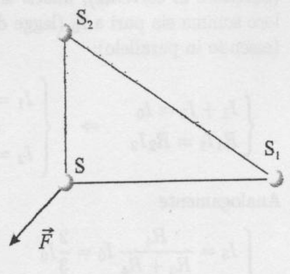
Preparazione Gara II livello - prof. G. BASSOLI_ 28/01/2015 1

Materiale didattico raccolto da "AIF - PROGETTO OLIMPIADI" _

ELETTRICITA'

P. 1 – Due elettrici in uno [Punti 20]

Parte A



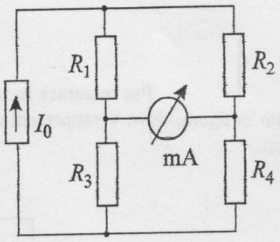
Tre piccole sfere cariche S, S_1, S_2 sono disposte come in figura, ai vertici di un triangolo rettangolo i cui cateti stanno fra loro in rapporto 3:2. In queste condizioni, sulla sfera S agisce una forza di intensità F, orientata a 45° rispetto alle rette dei due cateti.

1. Determinare il rapporto delle cariche presenti sulle sferette S_2 ed S_1.

Le posizioni delle sfere S_1 ed S_2 vengono scambiate lasciando ferma S.

2. Determinare il rapporto tra l'intensità della forza $\vec{F}'$ agente adesso sulla sfera S e quella della forza $\vec{F}$.

Parte B



Il circuito in figura è alimentato da un generatore di corrente costante I_0; le resistenze valgono rispettivamente $R_1 = R_3 = R$, $R_2 = 3R$, $R_4 = 2R$, mentre lo strumento di misura (un milliamperometro) presenta una resistenza trascurabile.

Si vuole determinare la corrente misurata dal milliamperometro in queste condizioni.

1. Perché si può affermare che le due resistenze R_1 ed R_2 si comportano come se fossero in parallelo? (e analogamente per R_3 con R_4)
2. Calcolare, in funzione di I_0, i valori delle correnti che scorrono nei quattro resistori.
3. Quanto vale allora la corrente misurata dal milliamperometro, se $I_0 = 360\,\text{mA}$?

S. P. 1 Due elettrici in uno

A – Diagramma di forze elettriche

Quesito n. 1.

Siano q, q_1 e q_2 le cariche sulle tre sferette e $3d$ e $2d$ le distanze lungo i cateti del triangolo. Le forze che le due sferette S_1 ed S_2 esercitano (separatamente) sulla sferetta S sono

$$F_1 = k\frac{q_1 q}{(3d)^2} \quad \text{e} \quad F_2 = k\frac{q_2 q}{(2d)^2}$$

Esse sono ortogonali e rappresentano le componenti ortogonali della forza $\vec{F}$; poiché esse sono di uguale intensità si ha

$$k\frac{q_1 q}{9d^2} = k\frac{q_2 q}{4d^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{kq_2 q}{kq_1 q} = \frac{4d^2}{9d^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_2}{q_1} = \frac{4}{9}$$

Quesito n. 2.

L'intensità della forza con le sferette nella posizione iniziale si può scrivere come

$$F = \frac{\sqrt{2}}{9}\,k\frac{q_1 q}{d^2} \approx 0.157\,k\frac{q_1 q}{d^2}$$

Dopo lo scambio delle sferette, le due componenti della forza $\vec{F}'$ diventano

$$F_1' = k\frac{q_1 q}{(2d)^2} = \frac{1}{4}k\frac{q_1 q}{d^2} \quad \text{e} \quad F_2' = k\frac{q_2 q}{(3d)^2} = \frac{4}{81}k\frac{q_1 q}{d^2}$$

$$\Rightarrow \quad F' = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{16}{6561}}\,k\frac{q_1 q}{d^2} \approx 0.255\,k\frac{q_1 q}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{F'}{F} \approx \frac{0.255}{0.157} = 1.62$$

B – Ponte di resistenze

Quesito n. 1.

Poiché il milliamperometro ha resistenza trascurabile, si può considerare che i due punti del circuito cui è connesso siano praticamente allo stesso potenziale; di conseguenza le resistenze possono essere pensate come in parallelo, due a due.

Quesito n. 2.

Per ogni coppia la corrente si ripartisce in modo inversamente proporzionale a ciascuna resistenza (partitore di corrente); infatti si può scrivere un sistema nelle incognite I_1 e I_2, imponendo che la loro somma sia pari a I_0 (legge del nodo) e che la d.d.p. ai capi delle resistenze R_1 ed R_2 sia uguale (essendo in parallelo):

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0 \\ R_1 I_1 = R_2 I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} I_0 = \dfrac{3}{4} I_0 \\ I_2 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} I_0 = \dfrac{1}{4} I_0 \end{cases}$$

Analogamente

$$\begin{cases} I_3 = \dfrac{R_4}{R_3+R_4} I_0 = \dfrac{2}{3} I_0 \\ I_4 = \dfrac{R_3}{R_3+R_4} I_0 = \dfrac{1}{3} I_0 \end{cases}$$

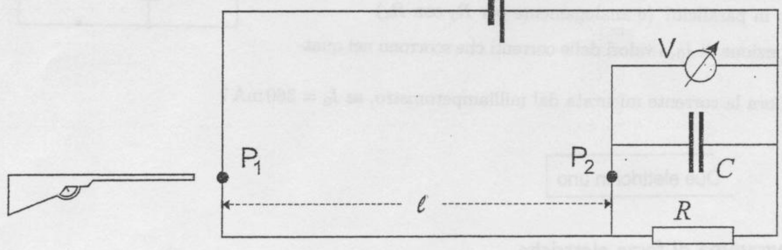
Quesito n. 3.

Applicando la legge dei nodi ad uno qualunque dei nodi del ramo contenente il milliamperometro, si ricava che la sua corrente è:

$$I = I_1 - I_3 = I_4 - I_2 = \frac{I_0}{12} = 30\,\mathrm{mA}.$$

Q. 1

Per misurare in laboratorio la velocità di un proiettile si predispone il circuito elettrico mostrato in figura, dove V rappresenta un voltmetro, $R = 1k\Omega, C = 1\,\mathrm{mF}$ e la distanza tra i punti P_1 e P_2 è $\ell = 10\,\mathrm{m}$.



Il proiettile sparato dall'arma da fuoco interrompe il collegamento elettrico prima in P_1 e successivamente in P_2. Prima che il proiettile sia sparato, il voltmetro misura $V_i = 12.04\,\mathrm{V}$; dopo che entrambi i collegamenti sono stati interrotti, misura $V_f = 11.53\,\mathrm{V}$.

- Determinare la velocità v del proiettile.

S. Q. 1

Prima che il proiettile sia sparato il condensatore è carico alla d.d.p. data dal generatore e misurata dal voltmentro (V_i). Il proiettile impiega un tempo $t = \ell/v$ per transitare da P_1 a P_2; in questo tempo il condensatore si scarica parzialmente sulla resistenza R secondo la relazione

$$V(t) = V_i e^{-t/RC}.$$

Ponendo $V(t) = V_f$, combinando le due relazioni e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$v = \frac{\ell}{RC\,\ln(V_i/V_f)} = 0.23\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

P. 2

Carica di un condensatore

È noto che caricando un condensatore per mezzo di un generatore di f.e.m. V costante (fig. 1) metà dell'energia erogata dal generatore si dissipa in calore per effetto Joule, indipendentemente dal valore della resistenza; in questo senso si potrebbe dire che il *rendimento* di questa procedura è del 50 %.

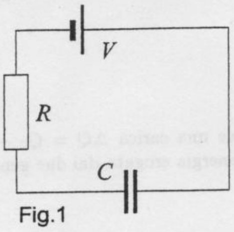


Fig.1

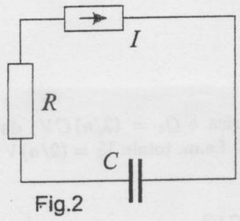


Fig.2

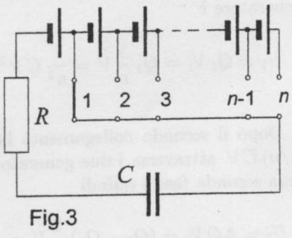


Fig.3

La stessa cosa non sarebbe vera se si utilizzasse un generatore di corrente (fig. 2), ovvero un dispositivo che carica il condensatore fino alla stessa d.d.p. V, facendo circolare nel circuito una corrente costante I, per il tempo necessario.

1. Tracciare un grafico che mostra come varia in questo caso il *rendimento* (sempre inteso come rapporto tra energia di carica del condensatore ed energia erogata dal generatore) in funzione della corrente I, calcolando per quale valore di I esso è pari al 50 %.

Si consideri ora una batteria di n generatori di f.e.m., uguali tra loro e tali che disposti in serie forniscano ancora una f.e.m. totale V, e si carichi il medesimo condensatore secondo la procedura che segue.
Prima fase: si collega il condensatore al primo generatore (connessione al punto 1 in fig. 3) e si attende che il condensatore sia carico, avendo raggiunto l'equilibrio elettrostatico.
Seconda fase: si sposta il commutatore nella posizione 2 (stessa figura) e si attende che il condensatore venga ulteriormente caricato per mezzo dei primi due generatori in serie.
Ulteriori fasi: si sposta il commutatore nella posizione 3 e si ripete l'operazione allo stesso modo con i primi tre generatori in serie, poi con quattro, e così via, fino ad arrivare alla posizione n.

2. Calcolare separatamente l'energia erogata dai generatori attivi nelle prime tre fasi del processo di carica.

3. Determinare il *rendimento* del sistema durante il processo completo di carica, valutandone l'estremo superiore al variare del numero n di generatori impiegati.

Nota. Può essere utile ricordare che la somma dei primi n numeri interi è data da:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

S.P. 2

Quesito n. 1.
Grafico del rendimento in funzione della corrente.

Per raggiungere la stessa d.d.p., cioè per portare la stessa carica ($Q = C\,V$) sul condensatore occorre un tempo $t = C\,V/I$.

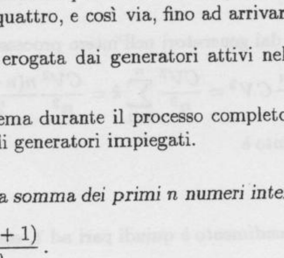
L'energia erogata dal generatore è la somma di quella immagazzinata nel condensatore $U_C = {}^1\!/_2\, C\,V^2$ e di quella dissipata per effetto Joule $U_J = RI^2\,t = RC\,I\,V$.

Il rendimento è allora

$$\eta = \frac{U_C}{U_C + U_J} = \frac{1}{1 + 2RI/V}$$

il cui grafico è riportato in figura: per I che tende a zero (tempo infinito) il rendimento tende a 1, mentre per I che tende a infinito (tempo nullo) il rendimento tende a zero.

Il rendimento è del 50 % quando $I = V/(2R)$.



%

Quesito n. 2.

Analisi delle prime fasi di carica.

Dopo il primo collegamento la carica sul condensatore è $Q_1 = (1/n)\,C\,V$ e l'energia erogata dal generatore è

$$U_1 = Q_1\,V_1 = Q_1\,\frac{1}{n}\,V = \frac{1}{n^2}\,C\,V^2\,.$$

Dopo il secondo collegamento la carica è $Q_2 = (2/n)\,C\,V$; dunque una carica $\Delta Q = Q_2 - Q_1 = (1/n)\,C\,V$ attraversa i due generatori di f.e.m. totale $V_2 = (2/n)\,V$; l'energia erogata dai due generatori nella seconda fase è quindi

$$U_2 = \Delta Q\,V_2 = (Q_2 - Q_1)\,\frac{2}{n}\,V = \frac{2}{n^2}\,C\,V^2\,.$$

Analogamente dopo il terzo collegamento si ha: $Q_3 = (3/n)\,C\,V,\ Q_3 - Q_2 = \Delta Q,\ V_3 = (3/n)\,V$; l'energia erogata dai generatori nella terza fase è

$$U_3 = \Delta Q\,V_3 = (Q_3 - Q_2)\,\frac{3}{n}\,V = \frac{3}{n^2}\,C\,V^2\,.$$

Quesito n. 3.

Rendimento del processo di carica.

Generalizzando le espressioni trovate sopra, si può dire che durante la k-sima fase la carica del condensatore passa da $Q_{k-1} = [(k-1)/n]\,C\,V$ a $Q_k = (k/n),C\,V$, con una variazione di carica pari ancora a $\Delta Q = (1/n)\,C\,V$; questa carica attarversa un generatore di f.e.m. totale $V_k = (k/n)\,V$ e dunque l'energia erogata è

$$U_k = \Delta Q\,V_k = \frac{k}{n^2}\,C\,V^2\,.$$

L'energia totale erogata dai generatori nell'intero processo di carica è dunque

$$U_G = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}\,C\,V^2 = \frac{CV^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{CV^2}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n}\,C\,V^2\,.$$

e il corrispondente *rendimento* è

$$\eta = \frac{U_C}{U_G} = \frac{n}{n+1}$$

L'estremo superiore per il *rendimento* è quindi pari ad 1, essendo questo il limite di $\eta(n)$ per $n \to \infty$.

Nota: è interessante osservare che avendo a disposizione un generatore di f.e.m. variabile si otterrebbe lo stesso risultato del punto precedente se si arrivasse al valore V in n passi successivi, attendendo ogni volta il raggiungimento dell'equilibrio.

Il *rendimento* può dunque assumere qualunque valore prossimo ad 1 pur di aumentare adeguatamente il numero di passi; al limite, nel caso in cui si faccesse variare la f.e.m. del generatore con continuità e in modo così lento da poter considerare il sistema in equilibrio ad ogni istante il *rendimento* potrebbe essere considerato esattamente uguale ad 1.

o

Q. 2 - Tre resistenze uguali che, alimentate a 12 V, dissipano 9 W ciascuna vengono disposte in serie tra loro e collegate alla stessa batteria da 12 V.

- Trovare la potenza elettrica dissipata da ciascuna resistenza nella nuova disposizione.

Detto R il valore di ogni resistenza, e V_0 la f.e.m. della batteria, la corrente circolante vale $i = V_0/(3R)$

S.Q.2 - Se P_0 è la potenza dissipata da ogni resistenza quando è connessa direttamente alla batteria, la potenza dissipata da ciascuna resistenza quando sono in serie vale allora

$$P = Ri^2 = \left(\frac{V_0}{3R}\right)^2 R = \frac{1}{9}P_0 = 1\ \mathrm{W}\,.$$

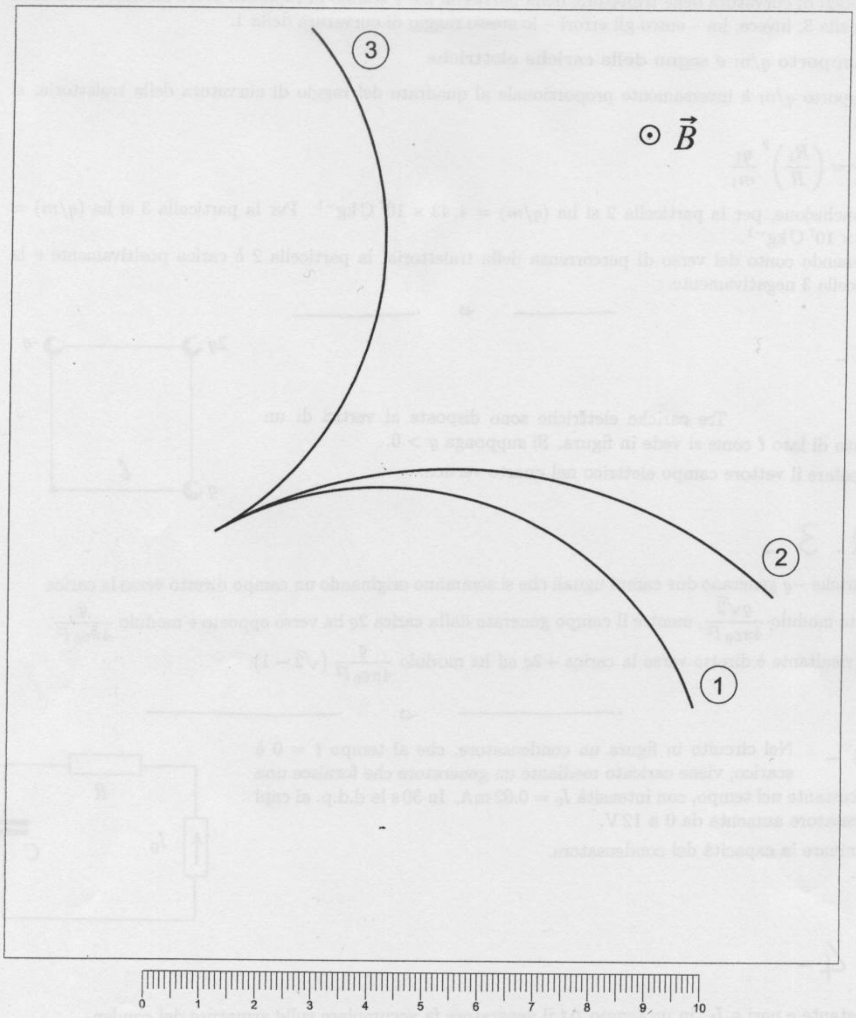
In alternativa si poteva considerare che, nella disposizione in serie, ad ogni resistenza è applicata una d.d.p. V_R pari a 1/3 di quella della batteria. Poiché la potenza dissipata da una resistenza si esprime anche come V_R^2/R risulta, come sopra,

$$P = \frac{V_R^2}{R} = \frac{V_0^2}{9\,R} = \frac{1}{9}P_0\,.$$

P.3 – Moto di cariche in un campo magnetico 12 punti 5

Tre particelle cariche vengono accelerate da una d.d.p. di 1000 V ed entrano, in tempi diversi e dallo stesso punto, in una zona sede di un campo magnetico uniforme $B = 3.0\,\mathrm{mT}$ perpendicolare alla velocità delle particelle. Le traiettorie, contrassegnate dai numeri 1, 2, 3 e relative alle tre particelle, sono riportate in figura. Il campo $\vec{B}$ è uscente dal piano del foglio. Il rapporto q/m per la particella 1 vale $9.58 \times 10^7\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$.

1. Determinare il rapporto q/m ed il segno della carica elettrica di ciascuna delle altre due particelle.



S.P.3 – Moto di cariche in un campo magnetico

1. Moto delle particelle nel campo $\vec{B}$

Su una particella di massa m e carica q in moto con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico $\vec{B}$ agisce la forza $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$. La particella esegue un moto circolare uniforme di raggio R per cui vale la relazione

$$\frac{m\,v^2}{R} = q\,v\,B$$

dove q, v, B rappresentano i moduli delle grandezze. Per le particelle accelerate, da ferme, da un potenziale V, si ha

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = qV$$

Eliminando v dalle due equazioni precedenti, si ricava

$$\frac{m}{R}\sqrt{\frac{2qV}{m}} = q\,B \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2\,R^2}$$

%

6

2. Misura del raggio delle traiettorie

Il raggio delle traiettorie si ricava misurandolo direttamente dalle traiettorie allegate, ricordando che il centro di un arco di circonferenza è l'intersezione degli assi di due corde.

La figura nella pagina seguente mostra un modo in cui questo può essere fatto.

I valori misurati dipendono dai fattori di scala legati all'ingrandimento delle riproduzioni, ma, conoscendo il valore di q/m, per una delle tre particelle, si può ricavare quello delle altre utilizzando il rapporto fra i raggi delle traiettorie.

I raggi di curvatura delle traiettorie della particella 2 e 1 stanno in rapporto 1,47. La traiettoria della particella 3, invece, ha – entro gli errori – lo stesso raggio di curvatura della 1.

3. Rapporto q/m e segno delle cariche elettriche

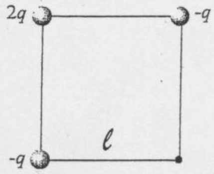
Il rapporto q/m è inversamente proporzionale al quadrato del raggio di curvatura della traiettoria, si trova

$$\frac{q}{m} = \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 \frac{q_1}{m_1}$$

In conclusione, per la particella 2 si ha $(q/m) = 4,43 \times 10^7\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$. Per la particella 3 si ha $(q/m) = 9,58 \times 10^7\,\mathrm{C\,kg^{-1}}$.

Tenendo conto del verso di percorrenza della traiettoria, la particella 2 è carica positivamente e la particella 3 negativamente.

Q. 3 -



Tre cariche elettriche sono disposte ai vertici di un quadrato di lato ℓ come si vede in figura. Si supponga $q > 0$.

- Calcolare il vettore campo elettrico nel quarto vertice.

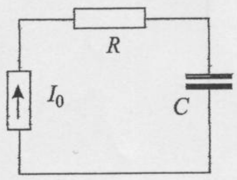
S. Q. 3 -

Le due cariche $-q$ generano due campi uguali che si sommano originando un campo diretto verso la carica $+2q$ avente modulo $\frac{q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\, l^2}$, mentre il campo generato dalla carica $2q$ ha verso opposto e modulo $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, l^2}$.

Il campo risultante è diretto verso la carica $+2q$ ed ha modulo $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, l^2}(\sqrt{2}-1)$.

Q. 4 -

Nel circuito in figura un condensatore, che al tempo $t = 0$ è scarico, viene caricato mediante un generatore che fornisce una corrente costante nel tempo, con intensità $I_0 = 0.02\,\mathrm{mA}$. In 30 s la d.d.p. ai capi del condensatore aumenta da 0 a 12 V.



- Determinare la capacità del condensatore.

S. Q. 4 -

Poiché I è costante e pari a I_0, in un tempo Δt il generatore fa accumulare sulle armature del condensatore una carica pari a $Q = I_0\Delta t$. Detta V la d.d.p. ai capi del condensatore, la capacità C può essere determinata dalla relazione

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{I_0\Delta t}{V} = 50\,\mu\mathrm{F}$$

Q. 5 -

Una goccia d'acqua ha un diametro di 0.1 mm ed è carica negativamente. Alla sua superficie il campo elettrico ha intensità uniforme $E = 5\,\mathrm{kV/cm}$.

- Determinare l'intensità di un campo elettrico uniforme capace di mantenere la goccia sospesa in equilibrio in aria, ferma.

S.Q5 -

Per mantenere la goccia sospesa in aria occorre che la forza elettrica equilibri il peso, e quindi sia verticale e diretta verso l'alto. Poiché la goccia è carica negativamente, il campo elettrico dev'essere verticale e diretto verso il basso. Calcoliamo ora il suo modulo.

Il campo alla superficie di una sfera, di raggio R e che possiede una carica q, ha intensità

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \text{per cui} \quad q = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E$$

Indicando con $\vec{E}_0$ il campo uniforme esterno capace di mantenere la goccia in equilibrio bilanciando la forza di gravità, deve avere intensità tale che

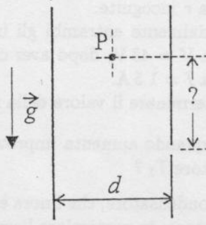
$$E_0 q = mg = (4/3)\pi R^3 \rho g$$

dove ρ è la densità dell'acqua. Sostituendo e ponendo $D = 2R$ (diametro della goccia) si ottiene

$$E_0 = \frac{\rho R g}{3\varepsilon_0 E} = \frac{\rho D g}{6\varepsilon_0 E} = 3.7 \times 10^4\ \text{V/m}$$

Q.6 -

Una particella elettrica di carica q e massa m viene lasciata libera da un punto P posto a metà tra le due facce di un condensatore piano mantenuto ad una differenza di potenziale costante V, come mostrato in figura.



- A quale distanza in verticale dal punto P deve essere praticato un foro su una faccia del condensatore in modo che la particella carica ci passi attraverso?

Valori numerici: $d = 10$ cm, $m = 1$ mg, $q = 1\,\mu$C, $V = 1$ V.

S.Q6

In direzione orizzontale la particella percorre il tratto $d/2$ nel tempo t: $d/2 = {}^1\!/_2\, at^2$ con $a = q\,V/(m\,d)$. Nello stesso tempo percorre in verticale un tratto y

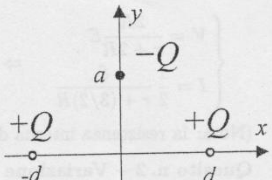
$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{a}d \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\frac{mgd^2}{qV} = 4.9\,\text{cm}$$

Soluzione alternativa: Poiché la particella si muove in due campi uniformi (gravità e campo e.s.) la forza risultante è la stessa in ogni punto, avendo componenti $\vec{F}_e = q\vec{E} = qV/d\,\hat{\imath}$ in orizzontale e $\vec{F}_g = mg\,\hat{\jmath}$ in verticale (essendo $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ i rispettivi versori). La particella si muoverà quindi lungo una traiettoria rettilinea orientata come la forza e la distanza y del punto di uscita si potrà determinare dalla proporzione

$$y : (d/2) = F_g : F_e \quad \Rightarrow \quad y = \frac{d\,F_g}{2F_e} = \frac{d\,mg}{2qV/d} = \frac{1}{2}\frac{mgd^2}{qV}$$

Q.7 -

Una carica elettrica irraggia energia quando viene accelerata. Questo fenomeno in moltissimi casi può essere trascurato, ma non quando si voglia studiare l'evoluzione a lungo termine di un sistema come questo.



Due cariche elettriche puntiformi $+Q$ sono tenute ferme sull'asse x in posizione rispettivamente $\pm d$, come mostrato in figura.

Una terza carica elettrica puntiforme di valore $-Q$ si trova invece inizialmente nella posizione $+a$ dell'asse y con velocità nulla.

Si osserva che la carica $-Q$ oscilla intorno alla posizione di equilibrio irraggiando energia; dopo un tempo molto lungo, la carica è ferma nella posizione di equilibrio.

- Quanto vale l'energia totale irraggiata?

S.Q.7 -

La posizione di equilibrio è chiaramente l'origine del sistema di riferimento. Poiché le forze esterne non compiono lavoro per tenere ferme le due cariche positive, l'energia irraggiata è l'opposto della variazione di energia elettrostatica del sistema e si calcola facilmente:

$$E_{irr} = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{a^2+d^2}}\right)$$