Q. 8

Un condensatore elettrico di capacità $C = 1\,\mu\text{F}$ è caricato con una carica elettrica $Q = 10^{-5}\,\text{C}$ e viene collegato ad una resistenza di valore $R = 10\,\Omega$.

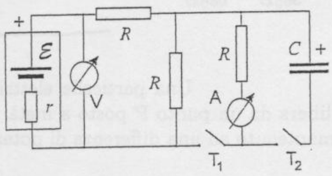
- Determinare l'intensità istantanea della corrente elettrica che fluisce appena viene stabilito il contatto.

S.Q.8.

Inizialmente tra le piastre del condensatore vi è una d.d.p. $V = Q/C = 10\,\text{V}$, quindi, nell'istante iniziale, la d.d.p. ai capi della resistenza elettrica vale 10 V e circola una corrente $i = V/R = 1\,\text{A}$. Negli istanti successivi, mentre il condensatore si sta scaricando, diminuisce la d.d.p. ai suoi capi e di conseguenza anche la corrente che circola nel circuito.

P. 4

Misure elettriche. [20 punti]



Nel circuito di figura le tre resistenze sono uguali ($R = 10\,\Omega$) e gli strumenti si possono trattare come ideali(*). L'alimentatore è un generatore di f.e.m. reale avente forza elettromotrice $\mathcal{E}$ e resistenza interna r incognite.

Inizialmente entrambi gli interruttori sono aperti e il voltmetro misura $V = 48\,\text{V}$; dopo aver chiuso l'interruttore T_1 l'amperometro misura $I = 1.5\,\text{A}$.

1. Determinare il valore della f.e.m. e della resistenza interna del generatore.
2. Di quando aumenta improvvisamente la corrente erogata dal generatore nell'istante in cui si chiude l'interruttore T_1 ?

Il condensatore, che finora è rimasto isolato, è carico essendo stato precedentemente collegato con il medesimo generatore: in particolare l'armatura superiore in figura è carica positivamente.

3. Quanto indica l'amperometro appena chiuso anche l'interruttore T_2 ?

(*) *Significa che la corrente nel voltmetro e la d.d.p. ai capi dell'amperometro possono essere considerate trascurabili.*

S.P.4

– Misure elettriche

Quesito n. 1 – Determinazione della f.e.m. e della resistenza interna del generatore.

Le due misure consentono di scrivere due equazioni nelle incognite $\mathcal{E}$ ed r: la prima si ottiene osservando che inizialmente l'unica maglia attiva è quella costituita da tre resistenze in serie ($r + R + R$) e che dunque la corrente è $I = \mathcal{E}/(r + 2R)$, da cui $V = 2RI$; chiuso il primo interruttore, si aggiunge un'ulteriore resistenza R in parallelo alla seconda cosicché la resistenza equivalente vista dal generatore (ideale) diventa $r + R + R/2$; la corrente misurata dall'amperometro è metà di quella erogata dal generatore.

$$\begin{cases} V = \dfrac{2R}{r+2R}\mathcal{E} \\ I = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{E}}{r+(3/2)R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \dfrac{RI}{4RI - V}\,V = 60\,\text{V} \\ r = 2\,\dfrac{V - 3RI}{4RI - V}\,R = 5\,\Omega \end{cases}$$

(Nota: la resistenza interna del generatore è piuttosto alta per questo circuito. . .).

Quesito n. 2 – Variazione della corrente.

La corrente erogata dal generatore prima di chiudere l'interruttore è $I_0 = V/(2R) = 2.40\,\text{A}$, mentre quella erogata dopo la chiusura è $I_1 = 2I = 3.00\,\text{A}$. La variazione istantanea è dunque $\Delta I = 0.60\,\text{A}$.

Quesito n. 3 – Corrente all'inizio della scarica del condensatore.

Chiuso anche l'interruttore 2 si consideri la maglia che in figura appare esterna, costituita dal generatore, una resistenza R e il condensatore. Detta I_G la corrente erogata adesso dal generatore, l'equazione di maglia è

$$(r + R)I_G + V_C = \mathcal{E} \quad \text{da cui} \quad I_G = 0 \quad \text{essendo} \quad V_C = \mathcal{E}$$

La corrente misurata dall'amperometro all'istante della chiusura è quindi solo dovuta al condensatore carico, per cui

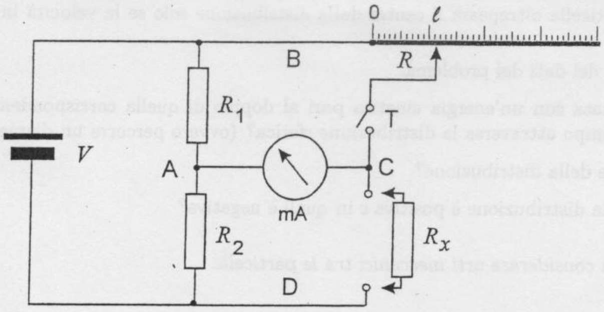
$$I' = \frac{V_C}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{IV}{4RI - V} = 6.0\,\text{A}$$

Misure di resistenza con un circuito a ponte. [20 punti]

P5_

9

Nel circuito in figura, alimentato da una batteria di f.e.m. $V = 12\,\mathrm{V}$, le resistenze $R_1 = 50\,\Omega$ e $R_2 = 100\,\Omega$ sono fissate, la resistenza R è costituita da un lungo filo teso di nichel-cromo (di sezione $s = 0.05\,\mathrm{mm}^2$ e resistività $\rho = 1\,\mu\Omega\,\mathrm{m}$) sul quale scorre un contatto mobile in modo che la resistenza tra i punti B e C possa essere variata facilmente e con accuratezza; lo strumento posto tra i punti A e C è un milliamperometro, la cui resistenza interna r si suppone sempre trascurabile, e infine tra i punti C e D può essere inserita un'ulteriore resistenza R_x il cui valore incognito è da determinare con precisione.



Inizialmente la resistenza incognita R_x non è inserita e il tasto T è aperto.

1. Quanto vale la d.d.p. tra i punti A e D?
2. Dopo aver chiuso il tasto T, quanto vale la corrente misurata dal milliamperometro, se il cursore della resistenza variabile è posto in modo che sia $R = R_1$?

Adesso si inserisce tra C e D la resistenza incognita R_x e si posiziona il cursore della resistenza variabile in modo che la corrente misurata dal milliamperometro sia nulla; il righello indica che il cursore sta alla distanza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ dall'estremo del filo.

3. Quanto vale la resistenza R_x?
4. Come deve essere scelta la resistenza R_2 in modo che la lettura del righello in centimetri dia direttamente il valore di R_x in ohm?

SP5_

Quesito n. 1.

La corrente che scorre nel circuito è $I = V/(R_1 + R_2)$ e la d.d.p. cercata è

$$V_{\mathrm{AD}} = R_2\, I = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, V = 8\,\mathrm{V}$$

Quesito n. 2.

Trascurando r, la resistenza totale è ora $R_1/2 + R_2$ e la corrente nel milliamperometro è metà di quella erogata dal generatore; quindi

$$I = \frac{1}{2}\,\frac{V}{R_1/2 + R_2} = \frac{V}{R_1 + 2\,R_2} = 48\,\mathrm{mA}$$

Quesito n. 3.

Se non scorre corrente nel milliamperometro la d.d.p. tra A e C è nulla, ovvero $V_{\mathrm{AD}} = V_{\mathrm{CD}}$; le d.d.p. si calcolano come al punto 1 e dunque

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2}\, V = \frac{R_x}{R + R_x}\, V \quad \Rightarrow \quad R_1\, R_x = R\, R_2 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2}{R_1}\, R = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{\rho}{s}\,\ell = 8\,\Omega$$

Quesito n. 4.

Dato che R_x e ℓ sono direttamente proporzionali, basta imporre che il coefficiente di proporzionalità abbia il valore voluto

$$R_x = \eta\, \ell \quad \text{con} \quad \eta = 1\,\Omega\,\mathrm{cm}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_2}{R_1}\,\frac{\rho}{s} = \eta \quad \Rightarrow \quad R_2 = \eta\,\frac{R_1\, s}{\rho} = 250\,\Omega$$

P. 6 – Un campo elettrostatico di modulo uniforme. [20 punti] 10

Si considerino due superfici sferiche concentriche di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = 2R$. Sia $\mathcal{V}$ il volume compreso tra le due superfici. Un campo elettrico radiale uscente, il cui modulo vale E_0, uguale in tutti punti del volume $\mathcal{V}$, viene realizzato mediante un'opportuna distribuzione di cariche superficiali e volumetriche (nel volume $\mathcal{V}$) in posizione fissata. Altrove il campo elettrico è nullo.

Una particella di massa m e carica $q > 0$ che interagisce con le cariche solo attraverso il campo elettrico (*) viene lanciata con una certa velocità iniziale in direzione radiale, cioè puntando al centro della distribuzione, da un punto esterno. Si osserva che la particella oltrepassa il centro della distribuzione solo se la velocità iniziale è strettamente maggiore di un valore $v_{\min}$.

1. Esprimere $v_{\min}$ in funzione dei dati del problema.
2. Se la particella viene lanciata con un'energia cinetica pari al doppio di quella corrispondente alla velocità $v_{\min}$ definita sopra, in quanto tempo attraversa la distribuzione sferica? (ovvero percorre un diametro pari a $2R_2$)
3. Quanto vale la carica totale della distribuzione?
4. In quali punti la carica della distribuzione è positiva e in quali è negativa?

(*) *Non si dovranno quindi considerare urti meccanici tra le particelle.*

S. P. 6 –

Quesito n. 1.

Lungo una retta radiale il campo elettrico è uniforme, quindi la d.d.p. tra un punto interno (per esempio il centro) ed uno esterno è

$$\Delta V = V_{\text{int}} - V_{\text{est}} = E_0\,(R_2 - R_1) = E_0 R$$

Per la conservazione dell'energia, dette v_0 e v_1 le velocità della particella all'esterno e all'interno della distribuzione, si ha

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + qV_{\text{est}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_{\text{int}} \quad \text{e dovendo essere} \quad v_1 > 0 \quad \text{si ottiene}$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2(q/m)\,\Delta V} > \sqrt{2(q/m)\,E_0\,R} = v_{\min}$$

Quesito n. 2.

Sia ora $K_{\text{i}} = 2K_{\min}$; allora la velocità iniziale è $v_{\text{i}} = \sqrt{2}\,v_{\min}$ e quella finale (all'interno della distribuzione) è $v_{\text{f}} = v_{\min}$ dato che, scrivendo ancora la conservazione dell'energia come sopra,

$$K_{\text{f}} = K_{\text{i}} - q\Delta V = 2K_{\min} - K_{\min} = K_{\min}$$

Il tempo necessario per arrivare al centro della distribuzione è dato da $T = \Delta t_1 + \Delta t_2$ dove Δt_1 è il tempo di attraversamento della distribuzione (da R_2 ad R_1) e Δt_2 il tempo per arrivare da R_1 al centro.

Il moto nella distribuzione di carica spaziale è uniformemente accelerato con accelerazione

$$a = -(qE_0)/m \quad \text{per cui, essendo} \quad v_{\text{f}} - v_{\text{i}} = a\,\Delta t_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\frac{m\,v_{\min}}{qE_0}$$

Il moto successivo è uniforme a velocità $v_{\min}$: $\Delta t_2 = R/v_{\min}$

Superato il centro, il moto è ancora uniforme fino alla superficie di raggio R_1 e poi uniformemente accelerato con accelerazione uguale in modulo alla precedente; il tempo impiegato complessivamente sarà quindi $2T$.

Fatte le opportune sostituzioni si ricava $2T = \left(2\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\dfrac{2mR}{qE_0}}$

Quesito n. 3.

Per il teorema di Gauss, dato che il campo e.s. esterno è nullo, la carica totale è nulla.

Quesito n. 4.

Ancora per il teorema di Gauss, si osserva che, nell'intervallo $R_1 < r < R_2$, il flusso del campo e.s. attraverso una sfera di raggio r ($\Phi = 4\pi r^2 E_0$) è una funzione positiva e crescente di r; questo comporta la presenza di una carica positiva sia sulla superficie sferica di raggio R_1 che nel volume $\mathcal{V}$. La carica negativa (che rende nulla la carica totale) dovrà trovarsi quindi sulla superficie sferica di raggio R_2.

NOTA importante: il fatto che il campo e.s. in un punto $R_1 < r < R_2$ abbia verso uscente, implica solo che la carica totale contenuta in una sfera di raggio r sia positiva, ma non esclude che possa essere presente localmente anche una densità di carica negativa; dunque la sola osservazione che il campo è sempre uscente non giustifica l'assenza di carica negativa.

Q.9 – Una carica $Q = 4\,\mathrm{nC}$ è distribuita uniformemente su un filo rettilineo lungo 2.4 m.

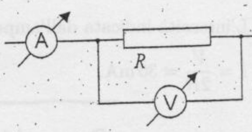
- Si calcoli il flusso del campo elettrico generato dal filo, attraverso una superficie sferica di raggio $R = 40\,\mathrm{cm}$ il cui centro è in un punto del filo situato a 20 cm da un'estremità.

S.Q9 – Per il teorema di Gauss relativo al campo elettrico, il flusso del campo attraverso una superficie chiusa è dato dal rapporto tra la carica interna alla superficie e la costante dielettrica del vuoto.

La carica da considerare è quella sulla parte di filo contenuto nella sfera, lungo 60 cm pari ad $1/4$ del totale; tale carica è quindi $Q/4$ ed il flusso sarà

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{4\varepsilon_0} = 113\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}} = 113\,\mathrm{V\,m}$$

Q.10 – Nel tratto di circuito rappresentato in figura, l'amperometro A misura una corrente $i = 30\,\mathrm{mA}$ ed il voltmetro V una differenza di potenziale $V = 100\,\mathrm{V}$.



- Trovare il valore della resistenza R, se la resistenza interna del voltmetro è $r = 10\,\mathrm{k\Omega}$.

S.Q.10 –

La corrente i misurata dall'amperometro attraversa successivamente il parallelo costituito dalla resistenza incognita R e dal voltmetro che presenta una resistenza r. Detta R^* la resistenza equivalente del parallelo si può allora scrivere

$$V = R^* I \quad \text{con} \quad \frac{1}{R^*} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{i}{V} \quad \text{da cui} \quad R = \frac{Vr}{ir - V} = 5.0\,\mathrm{k\Omega}\,.$$

Q.11 – Un condensatore di capacità elettrica C è caricato ad una differenza di potenziale V_0 e successivamente isolato. Un secondo condensatore, inizialmente scarico e di capacità elettrica nC, viene collegato in parallelo al primo.

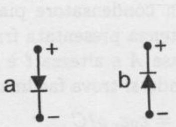
- Indicata con $V' = V_0/7$ la differenza di potenziale elettrico presente ai capi dei due condensatori così collegati, quanto vale n?

S.Q.11 –

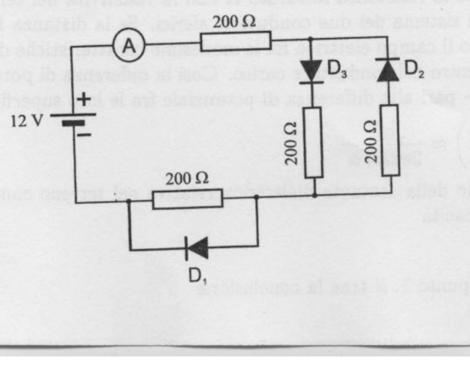
La carica Q inizialmente presente sul primo condensatore vale $Q = CV_0$. La capacità complessiva del sistema dei due condensatori in parallelo vale $C' = C_1 + C_2 = (n+1)\,C$. Per la conservazione della carica si ha

$$Q = CV_0 = C'V' \quad \Rightarrow \quad CV_0 = (n+1)\,C\,\frac{V_0}{7} \quad \Rightarrow \quad n = 6\,.$$

Q.12 – Un diodo è un dispositivo che, in prima approssimazione, si comporta come un conduttore di resistenza trascurabile quando è collegato in modo diretto come nella figura **a** a destra, ma assume resistenza infinita quando è collegato in modo inverso (figura **b**).



- Se la resistenza interna del generatore e dell'amperometro A sono trascurabili, quanto vale la corrente indicata dallo strumento, nel circuito seguente?

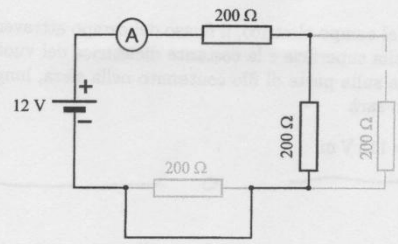


12

S.Q.12 -

Nel circuito i diodi D_1 e D_3 sono collegati in modo diretto e, avendo resistenza trascurabile, possono essere sostituiti da un cortocircuito; il diodo D_2 è collegato in modo inverso e quindi impedisce il passaggio di corrente nel proprio ramo.

Il circuito equivalente è perciò il seguente, dove in grigio sono stati indicati gli elementi ininfluenti per il calcolo della corrente. Questa potrà essere calcolata considerando la batteria chiusa sulla serie di due resistenze.



L'intensità indicata dall'amperometro sarà allora

$$I = \frac{V}{2R} = 30\,\mathrm{mA}.$$

Prove sul terreno. [20 punti]

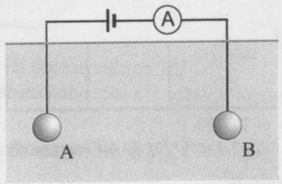
P.7 -

Un certo condensatore piano quando le sue armature sono isolate in aria ha capacità C. Se fra le armature si inserisce un materiale conduttore di resistività ρ il dispositivo presenta fra le due armature resistenza R.

1. Si esprima R in funzione di C.

Nel seguito del problema sarà utile sapere che il risultato appena trovato è valido per qualsiasi condensatore. In molte applicazioni della tecnica è importante conoscere la resistenza elettrica di un certo terreno e per tale motivo si procede alla determinazione della sua resistività.

Un metodo per farlo consiste nell'affondare nel terreno due elettrodi di metallo di forma sferica, A e B, curando che la terra vi aderisca bene. La distanza d fra A e B è abbastanza grande da poter considerare il diametro $2a$ degli elettrodi trascurabile rispetto ad essa. Ciascun elettrodo è collegato ad un lungo filo metallico opportunamente rivestito con materiale isolante. Procedendo nella misura della resistività del terreno i capi dei conduttori affondati in terra vengono collegati ad un generatore di data forza elettromotrice e nel circuito così formato si inserisce un amperometro così da misurare la resistenza presentata ai capi dei due elettrodi.



Le resistenze interne del generatore e dell'amperometro sono considerate trascurabili così come quella dei fili conduttori.

2. Si trovi una relazione fra la resistività del terreno in esame, le caratteristiche date e la resistenza misurata fra gli elettrodi.

S.P.7_

Quesito n. 1.

Un condensatore piano con piastre di area A che distano fra loro ℓ ha capacità $C = \varepsilon_0\, A/\ell$. La resistenza presentata fra le due basi da un prisma di materiale omogeneo di resistività ρ che abbia aree di base A e altezza ℓ è $R = \rho\,\ell/A$. Ricavando la frazione A/ℓ dalla prima di queste e sostituendo nella seconda si trova facilmente

$$R = \varepsilon_0\varepsilon_r\,\rho/C\,.$$

Quesito n. 2.

Per mettere in relazione la resistenza misurata R con la resistività del terreno è necessario calcolare la capacità presentata dal sistema dei due conduttori sferici. Se la distanza fra i due conduttori è assai maggiore del loro diametro il campo elettrico ha le medesime caratteristiche di quello dato da una carica q, oppure $-q$, posta nel centro del conduttore carico. Così la differenza di potenziale fra i due conduttori è – approssimativamente – pari alla differenza di potenziale fra le loro superfici

$$\Delta V = 2\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{d}\right) \approx \frac{|q|}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, a}$$

essendo ε_r un valore medio della costante dielettrica relativa nel terreno considerato. I due conduttori presentano quindi una capacità

$$C = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, a\,.$$

Dalla relazione trovata al punto 1. si trae la conclusione

$$\rho = 2\pi\, a\, R\,.$$

P. 8 - Sferette conduttrici. 20 punti 13

Due piccole sfere conduttrici identiche di raggio r, poste alle estremità di una sottile asticella isolante di lunghezza $\ell \gg r$, vengono caricate con una carica elettrica rispettivamente uguale a q_1 e q_2; sia $q_1 > q_2$.

In realtà l'asticella è stata fatta di un materiale non perfettamente isolante che presenta una resistività elettrica ρ; di conseguenza, si ha uno spostamento di carica elettrica fino ad una situazione di equilibrio, in cui le cariche valgono rispettivamente q_1' e q_2'.

1. Sapendo che la sezione dell'asticella è A e la sua lunghezza è ℓ, determinare la corrente che scorre inizialmente tra le due sferette.

Dopo l'istante iniziale, l'intensità della corrente decresce progressivamente nel tempo, senza azzerarsi rigorosamente che in un tempo infinito. Tuttavia, ai fini pratici, si può ritenere che l'equilibrio sia raggiunto dopo un *tempo di scarica* finito, oltre il quale gli errori di misura e le fluttuazioni statistiche della corrente ne superano il valore teorico.

2. Detto Δt e supposto noto questo tempo finito, si esprima il valore medio della corrente in questo intervallo.
3. Scrivere l'espressione della variazione ΔU di energia elettrostatica del sistema delle due sferette.
4. Utilizzando il principio di conservazione dell'energia e approssimando – sia pure rozzamente – il valore istantaneo della corrente con quello medio calcolato prima, ricavare una stima dell'ordine di grandezza di Δt con i seguenti dati numerici: $r = 2\,\text{cm}$; $\ell = 200\,\text{cm}$; $\rho = 45\,\text{k}\Omega\,\text{m}$; $A = 10\,\text{mm}^2$.

S.P.8_

Quesito n. 1.

Poiché $\ell \gg r$ le sferette possono essere considerate molto distanti tra loro e si può assumere che ciascuna sfera non risenta del campo elettrico prodotto dall'altra e, di conseguenza, nel calcolo del potenziale elettrostatico si può trascurare il contributo dovuto alla presenza della carica sull'altra sferetta, trattando ciascuna come un conduttore isolato.

La differenza di potenziale iniziale tra le sferette sarà quindi data da

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 - q_2}{r}.$$

La resistenza elettrica dell'asticella si ricava dalla seconda legge di Ohm ($R = \rho\ell/A$) e si ottiene quindi la corrente iniziale che scorre tra le due sferette:

$$I_0 = \frac{\Delta V}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 - q_2)\,A}{\rho\,\ell\,r}$$

Quesito n. 2.

Le due sferette raggiungono la condizione di equilibrio quando la d.d.p. si annulla,

$$\Delta V' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1' - q_2'}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1' = q_2' = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$$

per la conservazione della carica totale.

La carica trasferita (dalla sferetta 1 alla 2) è

$$\Delta q = q_1 - q_1' = q_2' - q_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$$

e il valor medio della corrente si può scrivere come

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_1 - q_2}{2\,\Delta t}$$

Quesito n. 3.

Una sfera isolata che viene caricata con una carica Q acquista un'energia potenziale elettrostatica

$$U = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\,dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2r}.$$

avendo posto a zero l'energia potenziale elettrostatica a distanza infinita.

Il risultato precedente si può ottenere anche ricordando che l'energia U immagazzinata in un conduttore che porta una carica Q vale $U = Q^2/(2C)$ e che la capacità di un conduttore sferico è $C = 4\pi\varepsilon_0\,r$.

Trattando quindi le sferette come isolate si calcolano facilmente l'energia iniziale del sistema

$$U_0 = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2C},$$

P/Q

e quella finale

$$U_1 = \frac{q_1'^2 + q_2'^2}{2C} = \frac{q_1'^2}{C} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4C}$$

espresse in termini della capacità C data sopra. La variazione di energia richiesta è quindi

$$\Delta U = U_1 - U_0 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4C} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2C} = -\frac{(q_1 - q_2)^2}{4C} = -\frac{(\Delta q)^2}{C} = -\frac{(\Delta q)^2}{4\pi\varepsilon_0\, r}$$

Quesito n. 4.

La variazione di energia elettrostatica del sistema è legata all'energia dissipata per effetto Joule nella resistenza dell'asticella nel tempo di scarica posto uguale a Δt.

La conservazione dell'energia richiede

$$\Delta U + RI^2\,\Delta t = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(\Delta q)^2}{C} = R\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)^2 \Delta t$$

da cui si può ricavare una stima del tempo di scarica

$$\Delta t = RC = \frac{4\pi\varepsilon_0 r\,\rho\,\ell}{A} = 20\,\mathrm{ms}$$

e concludere che l'ordine di grandezza di tale tempo è della decina di millisecondi.

NOTA IMPORTANTE: *Nel calcolo precedente si è assunto che la scarica avvenga a corrente costante pari alla corrente media su un intervallo di tempo finito. Chiaramente questo non è corretto, ma fornisce comunque una stima ragionevole.*

Il calcolo esatto – riportato qui sotto – che richiede la soluzione di un'equazione differenziale, mostra che il tempo così trovato corrisponde a 2 costanti tempo ($\Delta t = 2\tau$) del circuito equivalente al sistema delle due sferette ed è pertanto assolutamente accettabile.

Siano $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ le cariche sulle due sferette al tempo t (dall'istante di collegamento) e $q(t)$ la carica che si è spostata dalla sferetta 1 alla 2. Dunque

$$Q_1(t) = q_1 - q(t) \quad \text{e} \quad Q_2(t) = q_2 + q(t)$$

La d.d.p. tra le sferette e la corrente $i(t)$ valgono

$$\Delta V(t) = V_1 - V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 - Q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 - q_2 - 2q(t)}{r} \qquad i(t) = dq(t)/dt$$

La legge di Ohm si scrive allora

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 - q_2 - 2q(t)}{r} = R\frac{dq(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C'} = \frac{\Delta q}{C'}$$

Notare che $C' = C/2$ rappresenta la capacità del condensatore costituito dalle due sferette.

La soluzione dell'equazione è

$$q(t) = \Delta q\left(1 - e^{-2t/RC}\right).$$

La scarica è quindi caratterizzata da una costante tempo $\tau = RC/2 = 10.0\,\mathrm{ms}$.

Convenzionalmente si assume come tempo di scarica un intervallo temporale pari a $3 \div 5\tau$, in quanto in tale lasso di tempo la corrente elettrica può considerarsi praticamente nulla. L'intervallo temporale è quindi dello stesso ordine di grandezza di quello ottenuto con la stima precedente.

Materiale prodotto dal gruppo

PROGETTO OLIMPIADI
Segreteria Olimpiadi Italiane della Fisica
fax: 041.584.1272 e-mail: olifis@libero.it