Soluzioni

Problema 1.

È noto che la quantità d'energia irradiata per unità di tempo (ovvero la *potenza*) da un corpo nero vale

$$\mathcal{Q}_{u.d.t.} = \sigma T^4$$

ovvero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura, T. La costante di proporzionalità è detta costante di Stefan-Boltzmann. Essa è ricavabile per via analitica ed è definita da:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5{,}670373 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

dove k è la costante di Boltzmann, h è la costante di Planck e c è la velocità della luce nel vuoto.

Riguardo al problema specifico, l'unica sorgente di calore è quella dei dispositivi elettrici il cui valore indico con $\mathcal{Q}$. Tale sarà dunque anche il calore (per unità di tempo) che fluisce da una superficie chiusa (geometrica) avvolgente l'intero sistema in analisi, per la legge di conservazione dell'energia. Ergo, la temperatura dello scudo esterno varrà $T_{scudo} = T \equiv \left(\frac{\mathcal{Q}}{\sigma}\right)^{1/4} = 500\,K$.

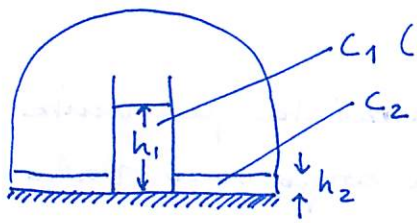
Tale scudo, irraggiando sia verso l'esterno che verso l'interno, farà sì che in realtà la temperatura della superficie della Monte Vera s'innalzi, giacché il calore, per unità di tempo, che la investe è la somma:

$$\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_{\substack{disp.\\elettr.}} + \mathcal{Q}_{scudo} = 2\mathcal{Q}$$

Per la legge di Stefan-Boltzmann

$$T_x = \left(\frac{2\mathcal{Q}}{\sigma}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{2} \cdot 500\,K$$

Problema 2.



All'equilibrio, avremo che la soluzione 1 si porterà ad una concentrazione $c = \frac{c_1 h_1}{h}$

Ove h è l'altezza della colonna di soluzione nel recipiente cilindrico all'equilibrio.

Fisicamente, la concentrazione cambia come riflesso dell'evaporazione delle molecole di H_2O dalla superficie allo ambiente, o vice versa.

La pressione di vapore saturo sopra la soluzione contenuta nel cilindro sarà minore rispetto a quella sopra alla soluzione contenuta sul fondo della campana d'una quantità:

$$(1) \qquad \Delta(\Delta p) = 0{,}05\, p_{sat}\,(c - c_2)$$

Tale differenza di pressione dev'esser compensata dalla quella dovuta al peso del vapore, pari a:

$$(2) \qquad \rho_{vap}\, g\,(h - h_2) \approx \rho_{vap}\, g\, h$$

(giacché $h_2 \ll h, h_1$). ↖ accelerazione di gravità

Da (1) e (2) troviamo:

$$h = \frac{0{,}05 \cdot p_{sat}\,(c - c_2)}{\rho_{vap}\, g}$$

La ρ_{vap} si stima dalla legge dei gas: $\rho_{vap} = \frac{p_{sat} \cdot m_{mol}}{RT}$

Dunque: $h = \frac{0{,}05 \cdot p_{sat}\,(c - c_2)}{p_{sat} \cdot m_{mol}\, g} RT =$

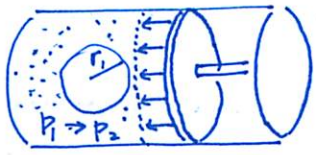
$$= \underbrace{\frac{0{,}05\, RT}{m_{mol}\, g}}_{0{,}689 \text{ metri}} \left(\frac{c_1 h_1 - c_2 h}{h} \right) = \frac{0{,}05\, RT\, c_2}{m_{mol}\, g} \left(\frac{2h_1}{h} - 1 \right)$$

Risolvendo l'eq. si trova:

$$h = 16{,}2 \text{ cm}$$

Dunque l'acqua evapora dal fondo per bilanciare (abbassando) la concentrazione, più alta, del liquido nel cilindro.

Problema 3



p_2, tale che $r_2 = \frac{r_1}{2}$, è l'incognita.

T = cost.

σ = tensione superficiale sapone

Per la legge dei gas: $p_j^{(\text{interna bolla})} = \frac{NkT}{\frac{4}{3}\pi r_j^3}$; $j = 1, 2$

N è il numero di molecole nella bolla. Trascurando osmosi o perdite è costante.

Ne segue che:

$$\frac{NkT}{\frac{4}{3}\pi} = p_j^{(int)} \cdot r_j^3 = \text{costante}$$

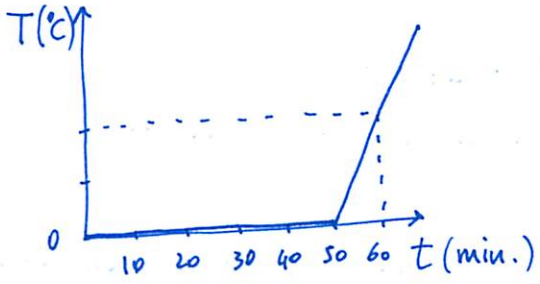
Dunque: $p_1^{(int)} / p_2^{(int)} = \left(r_2/r_1\right)^3 = \frac{1}{8}$

Inoltre: $p_j^{(int)} = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r_j} + p_j$

(2: due membrane: quella interna e quella esterna; $\frac{2\sigma}{r_j}$: legge "di Laplace")

Ergo: $p_2 = 8p_1 + \frac{24\sigma}{r_1}$

Problema 4



$T(t)$ è la temperatura della miscela. La temperatura dell'ambiente esterno è invece costante; cioè la stanza funge da termostato, unica sorgente esterna di calore, con rateo (ossia potenza) di q Joule per ogni 10 minuti.

Dunque: $\begin{cases} 5q = \lambda\, m_{\text{ghiaccio}}(t=0) \\ q = m \cdot c_a \cdot \Delta T \end{cases}$ (m: 10 kg; ΔT: 2 gradi)

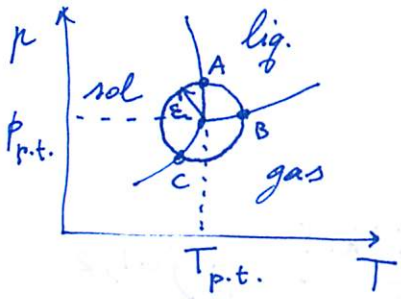
$\Rightarrow m_{\text{ghiaccio}}(t=0) = \frac{5 \cdot m \cdot c_a \cdot \Delta T}{\lambda} =$

$= \frac{5 \cdot 10 \cdot 4{,}2 \times 10^3 \cdot 2}{340 \times 10^3} =$

$= 1{,}2(4)$ kg

Problema 5

Punto triplo ≡ coesistenza, all'equilibrio, delle 3 fasi.



Considero un ciclo termodinamico rappresentato, nel piano pressione vs T da un cerchietto di raggio $\varepsilon > 0$, che farò tendere a zero.

Per il I principio della termodinamica (legge conservazione energia), avrò:

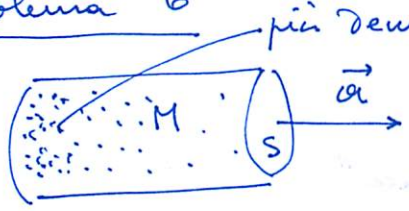
$$m\lambda + mq - m\nu = 0$$

(lavoro esterno $= 0$; $T = cost = T_{p.t.} \Rightarrow \Delta U = 0$, $\Delta Q = 0$, se si lavora per $\varepsilon \to 0$).

Da ciò otteniamo immediatamente:

$$\nu = \lambda + q = 2{,}82 \times 10^3 \ kJ/kg$$

Problema 6



$T = cost$

S'instaurerà, ad una certa accelerazione critica, a_c, la condensazione. Tale accelerazione critica varrà, per la legge di Newton:

$$a_c M = p_{sat} \cdot S$$

Per $a > a_c \Rightarrow m_{gassosa} < M$. Varrà poi sempre la legge di Newton applicata al gas:

$$m_{gassosa}\, a = p_{sat}\, S$$

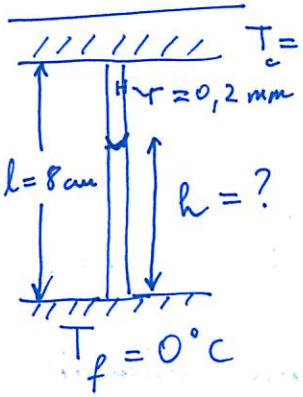
in quanto p_{sat} sarà il valor massimo di pressione raggiungibile dal gas.

Ergo, la massa che si condensa (sulla superficie posteriore del cilindro) e passa allo stato liquido è:

$$m_{liq.} \equiv M - m_{gassosa} = M - \frac{p_{sat}\, S}{a}$$

che è funzione dell'accelerazione.

Problema 7



La temperatura all'altezza h varia, per la legge della conduz. di calore:

$$T(h) = T_f + \frac{T_c - T_f}{l} h$$

$$= \frac{T_c}{l} h \quad \text{nel nostro caso (se si usano i °C)}$$

Inoltre, per la legge di Newton:

$$\rho_{acqua}\, g\, h\, \underbrace{\pi r^2}_{\text{superf. esposta interfaccia}} = \underbrace{\frac{\partial(\sigma \pi r^2)}{\partial r}}_{\text{forza elastica}} = 2\pi r \sigma \quad \leftarrow \text{energia elastica}$$

da cui:

$$h = \frac{2\sigma(T(h))}{\rho_{acqua}\, g\, r}$$

Ora, $\sigma\left[\frac{mN}{m}\right] = 76 - \frac{76-60}{90} \cdot T[°C] = 76 - \frac{8}{45} T$

$$= 76 - \frac{8}{45} \cdot \frac{100}{0{,}08} h\,[\text{metri}]$$

Viene dunque un'eq. di I grado in h che può essere risolta.

Problema 8

- ipotesi d'incomprimibilità:

il lavoro A delle forze esterne è dato dalla legge di conservazione dell'energia da:

$$A = \lambda \Delta m - (c_g - c_a)\, m\, \Delta T$$

ΔT: di quanto aumenta la T dovuto al fatto che aumenta la pressione

A: serve $\int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \approx p_1 \frac{\Delta V_1}{2}$

so che: (1) $\Delta V_1 = \frac{\Delta m}{\rho_g} - \frac{\Delta m}{\rho_a}$; (2) $\Delta T = \left(\frac{p_1}{p}\right) \cdot 1K \approx 0{,}1K$

→ in teoria è un'eq. integrale. In realtà possiamo ragionare in modo iterativo e dire che, visto che

$$A \leq p_1 \Delta V \ll (c_g + c_a)\, m\, \Delta T$$

da cui l'eq. di conserv. diventa, all'ordine zero:

$$0 \approx \lambda \Delta m - (c_g + c_a)\, m \Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \Delta m \approx \frac{(c_g + c_a)\, m \Delta T}{\lambda} \approx 3{,}2 \text{ grammi}$$

$\Rightarrow$ conosco $\Delta V \simeq 3{,}5 \times 10^{-7}\, m^3$ $\Rightarrow$ calcolo $\langle A \rangle = \frac{p_1 \Delta V_1}{2} \approx 0{,}44$ J

- Se si considerano anche le compressibilità di acqua e ghiaccio allora dovrò aggiungere il lavoro di compressione:

$$A' \equiv p_1 \frac{\Delta V'}{2} \quad \text{dove}$$

acqua è doppio di compress. del ghiaccio

$$\Delta V' \equiv \left(\frac{p_1}{p'} \cdot 1\%\right) V_{0\,acqua} + \left(\frac{p_1}{2\,p'}\right) V_{0\,ghiaccio}$$

con $V_{0\,ghiaccio} = 1{,}1\, V_{0\,acqua} = 1{,}1 \cdot 1\, dm^3$

$$\Rightarrow \Delta V' \approx 2 \cdot 10^{-6}\, m^3 \Rightarrow A' = \frac{p_1 \Delta V'}{2} \simeq 2{,}5 \text{ J}$$

E dunque il lavoro totale sarà:

$$\mathcal{A}_{tot} = A + A' \simeq 3 \text{ J} \ll (c_g + c_a)\, m \Delta T$$

e dunque la massa di ghiaccio fusa è la stessa del caso precedente (a questo livello d'approssimazione)