

SOLUZIONI

PROBLEMA 1

Quesito 1.

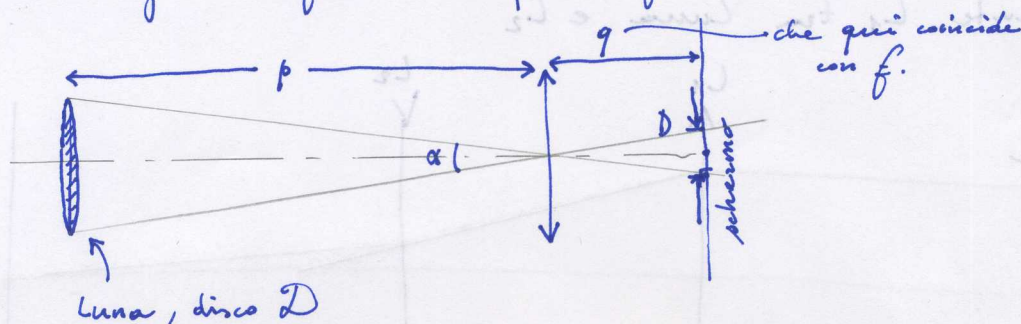
lenti sottili $\rightarrow$ eq. dei costruttori di lenti (punti coniugati)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Se $f > 0 \Rightarrow$ lente CONVERGENTE ; se $f < 0 \Rightarrow$ lente DIVERGENTE

Immagine Luna (a distanza molto grande $\Rightarrow p \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow q = f$

Ergo, l'immagine si forma nel piano focale della lente:

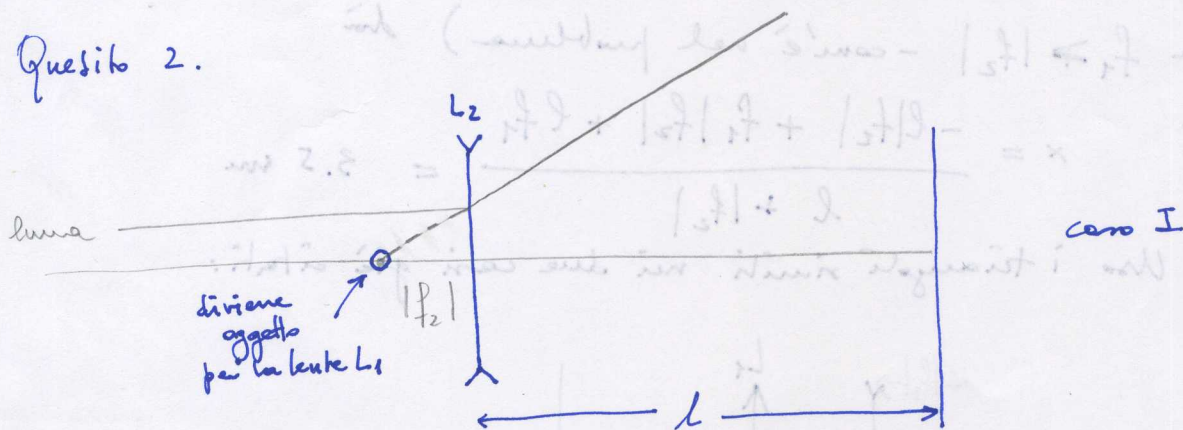


Per i criteri di similitudine dei triangoli si ha:

$$\frac{D}{p} = \frac{D}{q} \quad \text{ovvia} \quad 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{D}{q}$$

e poiché $q = f \Rightarrow D = 2f \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx f \cdot \alpha$

Quesito 2.



Se L_1 è tra L_2 e lo schermo allora la configurazione è quella in Figura. Chiamando x la distanza $L_2 \rightarrow L_1$, la legge delle lenti sottili per L_1 si scrive:

$$\frac{1}{x + |f_2|} + \frac{1}{l - x} = \frac{1}{f_1}$$

che dà un'eq. di 2° grado in x :

$$x^2 - (l - |f_2|)x + l f_1 + f_1 |f_2| - l |f_2| = 0$$

ho due soluzioni reali a patto che

$$l > 4f_1 - |f_2|$$

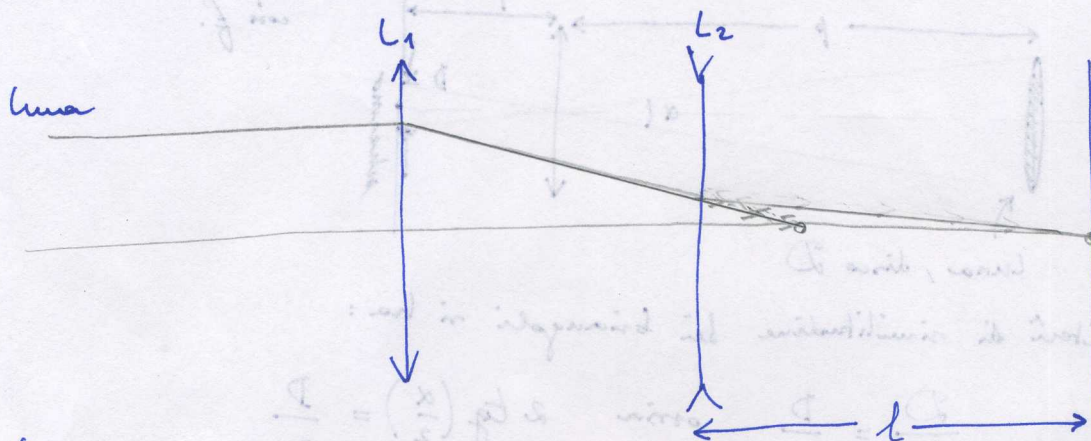
Esse sono positive certamente se $f_1 > |f_2|$

$$x = \frac{1}{2} [l - |f_2| \mp \sqrt{(l - 4f_1 + |f_2|)(l + |f_2|)}]$$

per $l = 45.0 \text{ cm}$, $f_1 = 8.0 \text{ cm}$ e $|f_2| = 5.0 \text{ cm}$, ho:

$$x = \frac{1}{2} [40 \pm \sqrt{18 \cdot 50}] = \frac{1}{2} [40 \pm 30] = \begin{cases} 35.0 \text{ cm} \\ 5.0 \text{ cm} \end{cases}$$

II caso: lente L_1 tra Luna e L_2



Si ha:

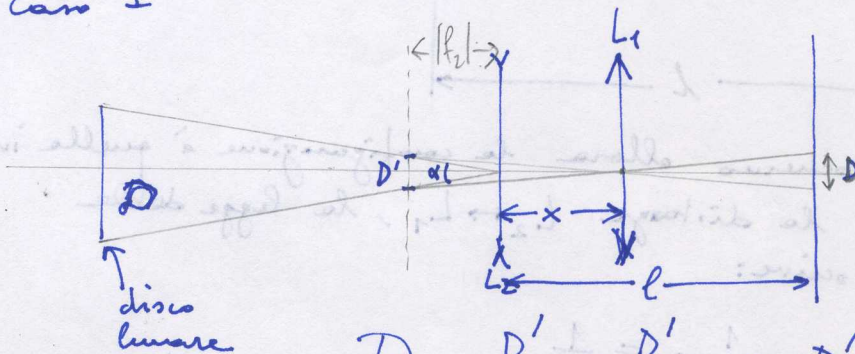
$$\frac{1}{x - f_1} + \frac{1}{l_2} = -\frac{1}{|f_2|} \Rightarrow (l + |f_2|)x = -l|f_2| + f_1|f_2| + lf_1$$

che (per $f_1 > |f_2|$ - com'è nel problema) dà

$$x = \frac{-l|f_2| + f_1|f_2| + lf_1}{l + |f_2|} = 3.5 \text{ cm}$$

Quesito 3. Usa i triangoli simili nei due casi già citati:

Caso I



$$\frac{D}{f_2} = \frac{D'}{f_2} = \frac{D'}{|f_2|} \Rightarrow D' = 2|f_2| \tan \frac{\alpha}{2} \approx |f_2| \cdot \alpha$$

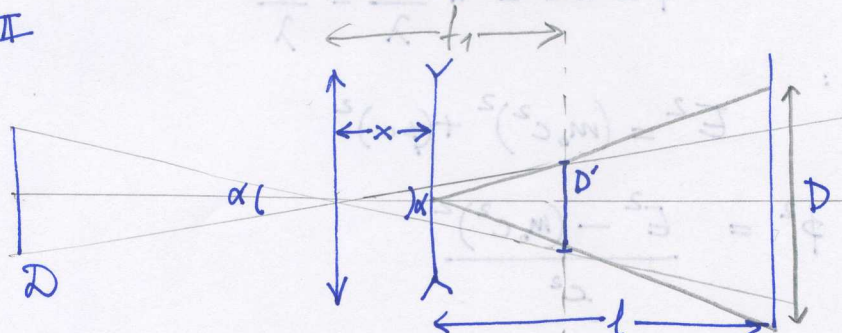
Inoltre, per la lente L_1 : $\frac{D}{l-x} = \frac{D'}{x+|f_2|}$

da cui: $D \approx |f_2| \alpha \frac{l-x}{x+|f_2|}$

per $x = 5 \text{ cm} \Rightarrow D \approx 0.18 \text{ cm}$

per $x = 35 \text{ cm} \Rightarrow D \approx 0.01 \text{ cm}$

Caso II



$$\begin{cases} \frac{D}{f_1 \rightarrow +\infty} = \frac{D'}{f_1} = \frac{D'}{f_1} \Rightarrow D' = 2f_1 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \approx f_1 \alpha \\ \frac{D}{l} = \frac{D'}{f_1 - x} \end{cases}$$

da cui trova:

$$D = \alpha f_1 l / (f_1 - x)$$

per $x = 3.5 \text{ cm} \Rightarrow D = 0.70 \text{ cm}$

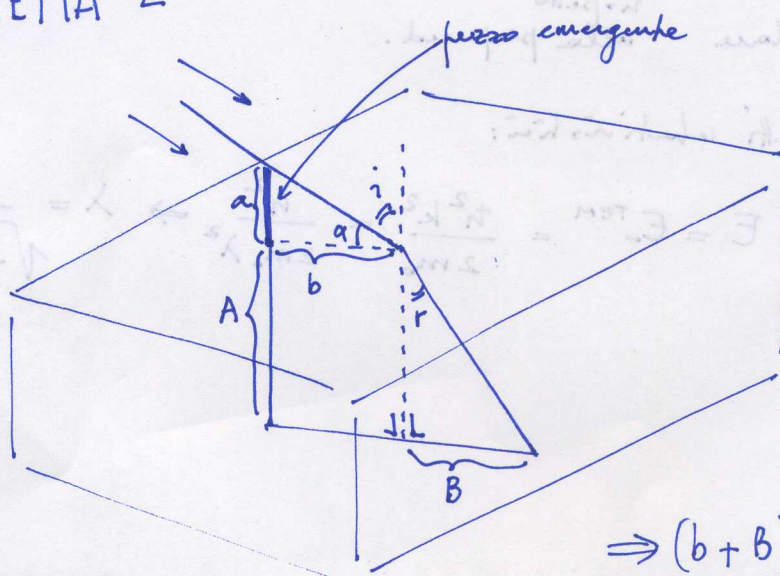
Questo 4.

$$D = f \alpha \Rightarrow f_3 = \frac{D}{\alpha} = 80 \text{ cm}$$

$f_3 \Rightarrow l+x_3 \Rightarrow$ stessa immagine delle Lense con ingrandimento ridotto rispetto all'uso d'una sola lente

$\hookrightarrow$ TELEBIETTIVI.

PROBLEMA 2



Per i triangoli:

$$\frac{b}{a} = \tan i$$

$$i = 40^\circ$$

$$n \sin r = 1 \cdot \sin i$$

$$\frac{B}{A} = \tan r = \tan \left(\arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right)$$

$$\Rightarrow (b+B) = a \tan i + A \tan \left(\arcsin \left(\frac{\sin i}{n} \right) \right)$$

PROBLEMA 3

Lunghezza d'onda associata all'elettrone λ per q. di moto p :

$$\phi = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Per la relatività:

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$

$$\Rightarrow \phi^2 = \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2}$$

$$E = eV + m_0 c^2$$

con V = tensione del microscopio. $\Rightarrow p^2 = \frac{1}{c^2} [(eV + m_0 c^2)^2 - (m_0 c^2)^2]$

Dunque:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{(eV)^2 + (m_0 c^2)^2 + 2eV m_0 c^2 - (m_0 c^2)^2}} = \\ &= \frac{hc}{\sqrt{(eV)^2 + 2eV m_0 c^2}} = \frac{hc}{\sqrt{2eV m_0 c^2 \left(1 + \frac{eV}{2m_0 c^2}\right)}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_0^{\text{TEM}} \left(1 + \frac{E_0^{\text{TEM}}}{2m_0 c^2}\right)}} \quad \text{con } E_0^{\text{TEM}} \equiv eV \end{aligned}$$

Ora imponiamo la condizione di interferenza costruttiva:

$$d \sin \theta = n \lambda \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

↑
piano
reticolare

↑
rispetto
alle perpend.

(Se non include effetti relativistici:

$$E = E_0^{\text{TEM}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0 \lambda^2} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_0^{\text{TEM}}}}$$

PROBLEMA 6.

Un'onda in moto è caratterizzata da:

- un'ampiezza dell'oscillazione, A
- una funzione oscillante (seno, coseno) funzione delle posizioni e del tempo secondo
 - una legge oraria di propagazione:

$$x = vt$$

- una relazione di dispersione, che caratterizza la velocità v in funzione di frequenza angolare e "spaziale" (vettore d'onda):

$$\omega = v k$$

Ne segue che cerchiamo una soluzione nella forma di:

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx - \omega t)$$

σ

↑ ↑ ↑
posit. tempo

↑ oscillazione

essencialmente + φ , faseamento

Ora: $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{T}$ (T è il periodo); $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (λ è la lung. d'onda)

Nel nostro caso:

$$A = 0,010 \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 440 \approx 2765 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

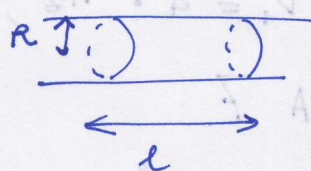
$$v = v_{\text{sound}} = 330 \text{ m/s}$$

⇒ dalle rel. di dispersione $k = \frac{\omega}{v} \approx 8.38 \text{ m}^{-1}$

[Nota: rel. dispersione in un mezzo: $\omega = \frac{c}{n} k$
 $\swarrow$ in un mezzo di riferimento
 $\nwarrow$ indice di rifrat.]

PROBLEMA 5.

Considero la corda un cilindro (tiro)



Stesso materiale $\Rightarrow$ stessa densità:

$$\rho = \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2}$$

$$= \frac{\mu_1 l}{\pi R_1^2 l} = \frac{\mu_2 l}{\pi R_2^2 l}$$

$$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{3.0}{0.29}} = 3.2$$

PROBLEMA 6.

La relazione costitutiva tra lega velocità, tensione e densità lineare delle corde è:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

tensione (Newton = $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)
densità lineare (massa per u. di lunghezza)
($\frac{\text{kg}}{\text{m}}$)

(Si noti che $\mu = \frac{T}{v^2} \Rightarrow \frac{T_1}{v_1^2} = \frac{T_2}{v_2^2}$)

a) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{M/L}} = 144 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

b) Lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{2L}{n}$ (si è qui imposta

la condizione di stazionarietà: FATTORIZZAZIONE della funzione in (parte temporale). (parte spaziale)

L = numero intero di mezza lunghezza d'onda

↓ applico condizioni al bordo

Pertanto:

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 3 \text{ metri}$$

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 1,5 \text{ metri}$$

c) $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{EL/M}}{\lambda} = \sqrt{\frac{TL}{(\frac{2L}{n})^2 M}} = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{T}{LM}}$

$v_1 = 48 \text{ Hz}, v_2 = 96 \text{ Hz}$

PROBLEMA 7.

Sfasamento: differenza di "cammino di fase":

$$\varphi = \Delta(kx) = \Delta k \cdot x + k \cdot \Delta x$$

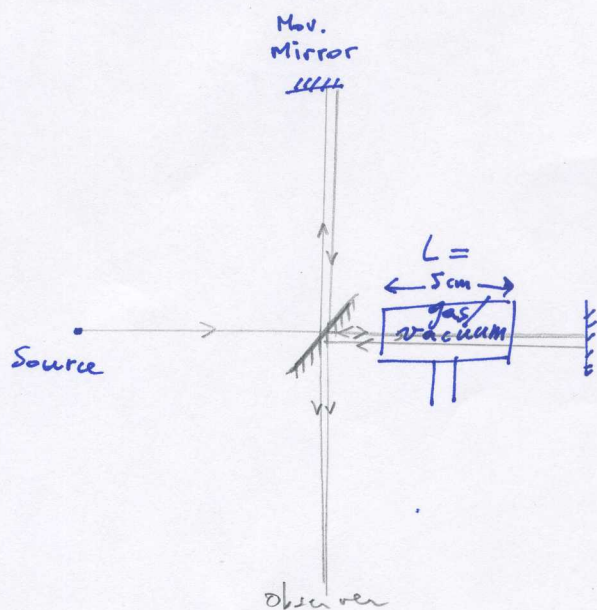
Nel nostro caso:

$$\Delta k = \Delta \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) = 0$$

(perché $\lambda_1 = \lambda_2$), mentre $\Delta x = d_2 - d_1$

$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (d_2 - d_1) \Rightarrow$ poiché $\lambda = \frac{v}{\nu} = 0,61 \text{ metri} \Rightarrow \varphi = 4,11 \text{ rad}$

PROBLEMA 8



Optical path difference $\Delta\phi_{vac} - \Delta\phi_{gas}$

$$\Delta\phi_{vac} = \frac{2\pi}{\lambda_{vac}} 2L$$

$$\Delta\phi_{gas} = \frac{2\pi}{\lambda_{gas}} 2L$$

$$\Rightarrow \text{phase diff.} \therefore 2\pi \left(2L \left(\frac{1}{\lambda_{vac}} - \frac{1}{\lambda_{gas}} \right) \right)$$

Now, since : $\lambda_{gas} = \frac{\lambda_{vac}}{n = \text{ref. index}} \Rightarrow \lambda_{gas} = \frac{\lambda_{vac}}{n}$

Hence: phase diff. = $2\pi \left(\frac{2L}{\lambda_{vac}} (1 - n) \right)$

$$\Delta N_{\text{fringes}} = \frac{|\text{phase diff.}|}{2\pi} = \frac{2L}{\lambda_{vac}} (n-1) \Rightarrow (n-1) = \frac{40}{2} \cdot \frac{800 \cdot 10^{-9}}{8 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-4}$$

↑
phase diff. in units of 2π .

Therefore, the right answer is c).